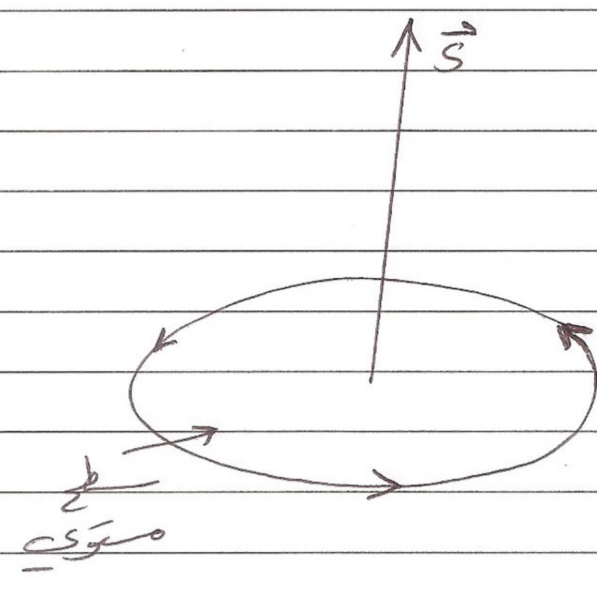
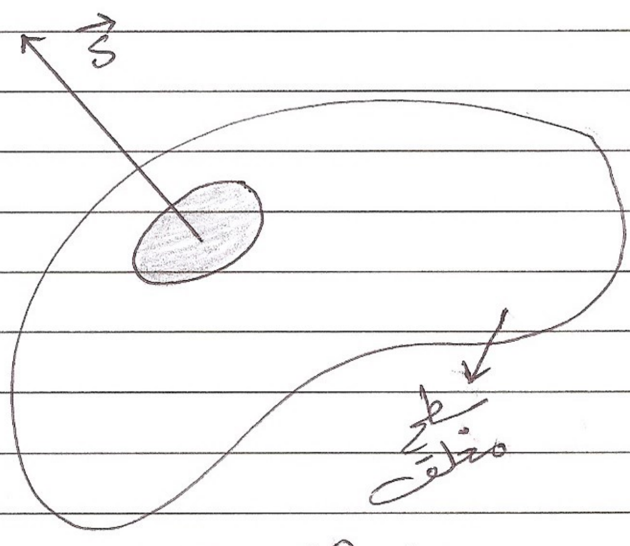
(9-1) تمثيل المساحة بكمية متجهة
Representation of area by a vector

إذا كانت للسطح الموضح بالشكل (11) مقداراً ممثلاً بمساحته وإتجاهاً محدداً بالعمود المقام عليه فهو متجه . ولتعيين الإتجاه الموجب للعمود المقام على ذلك السطح نتبع الطريقة التالية :

* إذا كان السطح جزء من سطح كبير مغلق يصبح إتجاه العمود المرسوم نحو الخارج موجباً وكما هو موضح في الشكل (12) .
* وإذا كان السطح ليس جزءاً من سطح مغلق كما في الشكل (11) فلابد أن نعطي صفة موجبة لحدود هذا السطح لتعيين الإتجاه الموجب للعمود . فإذا دارت الأصابع الأربع لليد اليمنى حول حدود السطح عكس حركة عقرب الساعة الذي يعني الإتجاه الموجب لحدود السطح فالإبهام يحدد الإتجاه الموجب للعمود المقام على ذلك السطح .



الشكل (11)



الشكل (12)

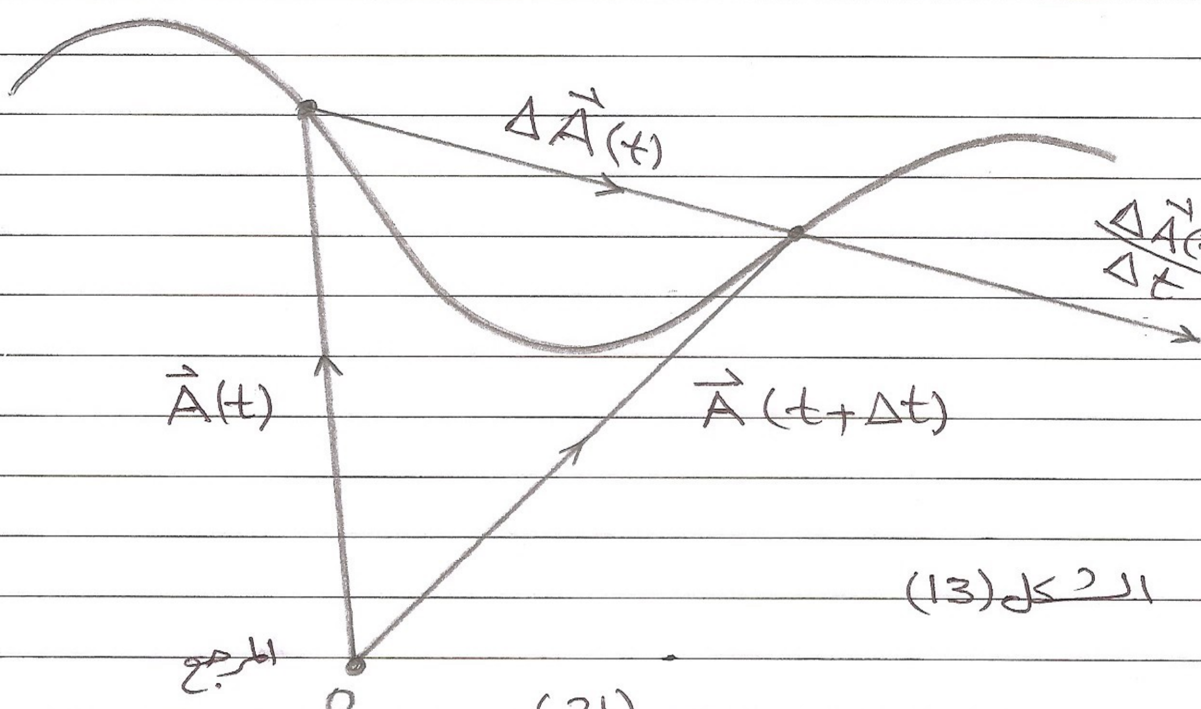
Differentiation of Vectors. (1 − 10) تفاضل المتجهات

يتم تفاضل المتجه بنفس الطريقة التي يتم بها تفاضل اي كمية عددية. فاذا فرضنا المتجه $\vec{A}$ وهو دالة للمتغير العددي (t) فأن عملية التفاضل تعطى بما يلي:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} \qquad (34)$$

حيث أن $\Delta\vec{A}$ يمثل التغير الحاصل في المتجه $\vec{A}(t)$ وكما هو موضح في الشكل (13).

على سبيل المثال نعتبر t يمثل الزمن و $\vec{A}(t)$ متجه الموضع لجسم يتحرك على خط منحني. وخلال فترة زمنية قصيرة Δt يتغير المتجه $\vec{A}(t)$ فيصبح $\vec{A}(t+\Delta t)$. وبما أن الخصائص المتجهية لأي متجه لا تتغير عندما نقسم المتجه على كمية عددية فأن المتجه $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ يقع بنفس اتجاه $\Delta\vec{A}$ وكما هو موضح في الشكل (13).



الشكل (13)

وإذا أقتربت Δt من الصفر أقترب المتجه $\vec{A}(t+\Delta t)$ من المتجه $\vec{A}(t)$ حتى ينطبق عليه تماماً وتكون الزاوية المحصورة بينهما مساوية للصفر وتصبح عندها أتجاه المتجه $\frac{d\vec{A}}{dt}$ منطبقاً على المماس للمنحنى في نهاية المتجه $A(t)$.

* وبما أنه يمكن تعريف المتجه بدلالة مركباته المتعامدة وفقاً للعلاقة :

$$\vec{A}(t) = \vec{i}\,A_x(t) + \vec{j}\,A_y(t) + \vec{k}\,A_z(t) \quad ---(35)$$

أذن مشتقة $\vec{A}(t)$ بالنسبة الى الزمن تكتب كالآتي :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \vec{i}\,\frac{dA_x(t)}{dt} + \vec{j}\,\frac{dA_y(t)}{dt} + \vec{k}\,\frac{dA_z(t)}{dt} \quad ---(36)$$

* وبتطبيق أسس الرياضيات الاعتيادية على أن نكتب :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} \quad ---(37)$$ جمع متجهين

$$\frac{d(m\vec{A})}{dt} = \vec{A}\,\frac{dm}{dt} + m\,\frac{d\vec{A}}{dt} \quad ---(38)$$ حاصل ضرب كمية عددية بمتجه

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} \quad ---(39)$$ ضرب عددي

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{dt} \quad ---(40)$$ ضرب اتجاهي

ملاحظة : دوال الكميات العددية والأتجاهية بعد الاشتقاق للمتغير العددي t .

11-1 أنحدار المجال Field gradient

لنتصور كمية عددية مثل الجهد فاذا كانت لهذه الكمية قيماً متفردة في كل نقطة من نقاط حيز معين فأنها تكون ما يسمى بالمجال العددي ضمن ذلك الحيز.

مثال:

دالة الجهد $V(r)$، لكل قيمة من قيم r هنالك قيمة محددة واحدة من قيم دالة الجهد

نفرض لدينا أن الدالة ϕ هي دالة لـ x و y و z ولها قيمة محددة عند النقطة P، وأن $\phi + d\phi$ هي قيمة الدالة في نقطة أخرى مثل Q كما في الشكل (14) النقطة Q تبتعد عن النقطة P مسافة تفاضلية ضمن الحيز مقدار هذه المسافة التفاضلية هو dl

وبالاستفادة من مبرهنة تيلر يمكن أن نكتب:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \quad \text{---}(41)$$

هذه العلاقة هي ناتج ضرب كميتين عدديتين هما $\vec{dl}$ و $\vec{\nabla}\phi$ وهي تعطى بما يلي

$$\vec{dl} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \quad \text{---}(42)$$

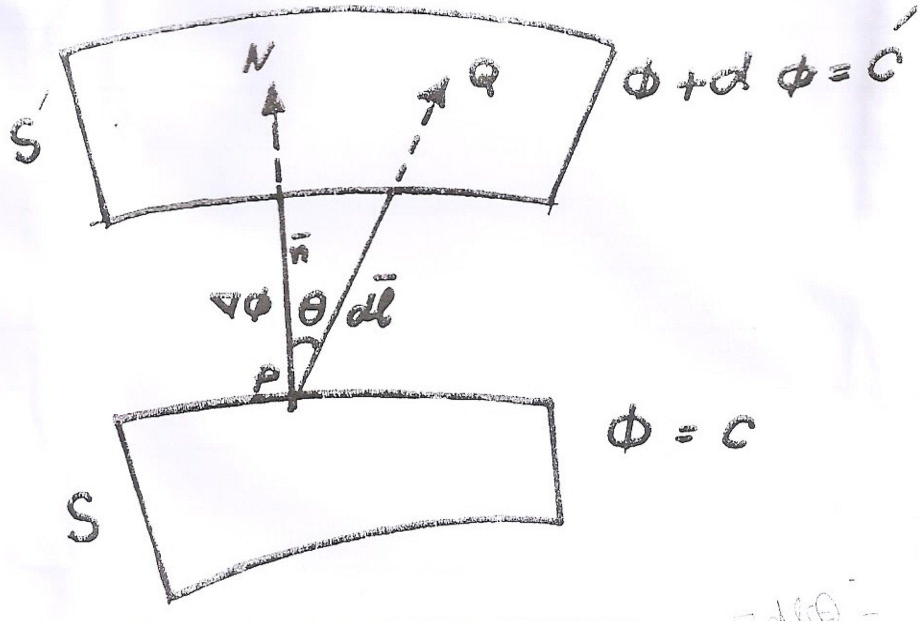
$$\vec{\nabla}\phi = \vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{---}(43)$$

حيث أن

$$d\phi = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{dl} \quad \text{---} 44$$

$$\therefore \quad d\phi = |\vec{\nabla}\phi|\,|\vec{dl}|\cos\theta$$

الزاوية θ موضحة في الشكل (14).



الشكل (14)

واذا كانت Φ تمثل الجهد فان $\vec{\nabla}\Phi$ يسمى الانحدار في الجهد (أو انحدار الجهد) ويمكن أن يكتب كالآتي أيضاً

$$\vec{\nabla}\Phi \equiv \text{grad}\,\Phi$$

وأن الزيادة لـ $d\Phi$ يكون الاعظم عندما تكون قيمة الزاوية θ مساوية للصفر. أما عندما يكون $\vec{\nabla}\Phi$ و $d\bar{l}$ متعامدان ، يعني الزاوية بينهما 90 فان $d\Phi = 0$.

$\therefore$ $\vec{\nabla}\Phi$ هو متجه مقداره يمثل أقصى معدل لتغير Φ بالنسبة الى الازاحة واتجاهه باتجاه ذلك التغير.

12-1 المؤثر $\vec{\nabla}$

أن المؤثر $\vec{\nabla}$ على داله عدديه من ϕ والذي يعطي $\vec{\nabla}\phi$ او ما يسمى grad ϕ هو متجه تختلف صفاته تماماً عن ϕ التي تمثل كميه عدديه ، ويمكن أن نعتبر $\vec{\nabla}$ مؤثر تفاضلي هذا المؤثر الاتجاهي كما وضحنا يأخذ الصيغه التاليه:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad ---(45)$$

وهنالك عمليات مهمه أخرى للمؤثر $\vec{\nabla}$ وهي كالآتي:

1- الضرب العددي للمؤثر $\vec{\nabla}$ واي متجه آخر مثل $\vec{A}$

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ---(46)$$

هذه الكميه تسمى تفرق المجال $\Longrightarrow$ divergence $\vec{A} \equiv$ div $\vec{A}$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{div}\,\vec{A} \quad --- 47$$

2- الضرب الاتجاهي للمؤثر $\vec{\nabla}$ واي متجه مثل $\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right) \quad ---(48)$$

هذه الكمية الأتجاهية $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ تسمى أيضاً $Curl\ \vec{A}$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}=Curl\ \vec{A} \quad ---(49)$$

واجبات: أجري الخطوات الآتية بالتفصيل

هنالك علاقات مختلفة تتضمن استخدام المؤثر $\vec{\nabla}$ والتي ينتج عنها علاقات يمكن اثباتها بسهوله اذا ما تم كتابتها بدلالة مركباتها المتعامده.

وهي:

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})=(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}+\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad ---(50)$$

كمية عددية تعتمد على x وy وz

كمية أتجاهية

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})=(\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A}+\phi\,\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad ---(51)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \quad ---(52)$$

ملاحظة: / توضيح

كمية أتجاهية $\vec{\nabla}\phi\equiv grad\ \phi$

كمية عددية $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\equiv div\ \vec{A}$

كمية أتجاهية $\vec{\nabla}\times\vec{A}\equiv Curl\ \vec{A}$

ملاحظة: قد يتكرر المؤثر $\vec{\nabla}$ مرتين وكما هو موضح ادناه

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}\cdot \text{grad}\,\phi = \text{div grad}\,\phi \qquad (a)$$

$$= \nabla^2\phi \Rightarrow \text{كمية عددية} \quad \text{---} (53)$$

∇^2 هو مؤثر تفاضلي يسمى مؤثر لابلاس العددي وهو ليس متجهاً خلافاً للمؤثر $\vec{\nabla}$:

$$\therefore \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{---} (54)$$

(b) كذلك يمكن أن يؤثر ∇^2 على كمية اتجاهية /على سبيل المثال/

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{A} \quad \text{---} (55)$$

3- $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \text{grad div}\,\vec{A} \quad \text{---} (56)$$

* وهي كمية اتجاهية الا أننا لا نعطي له اي اهمية تذكر

4- $$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \text{Curl grad}\,\phi \quad \text{---}$$

والتي يمكن أن يكتب كالاتي:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{---} (57)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \text{div curl}\,\vec{A} = 0 \qquad \text{— 5}$$

واجب اثبت ذلك

--- (58)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \text{curl curl}\,\vec{A} \qquad \text{— 6}$$

$$= \text{grad div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$$

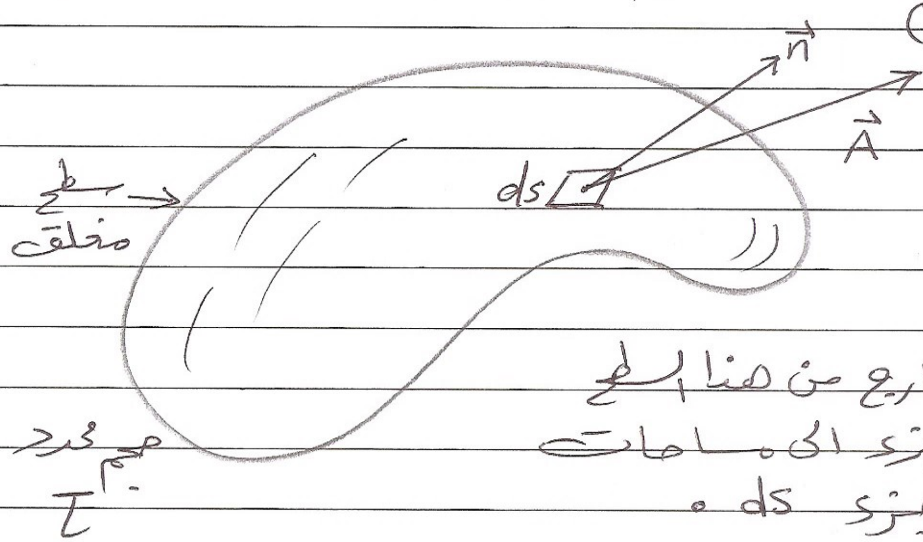
$$\therefore \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\bar{A}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{A} \quad \text{.... 59}$$

واجب / أثبت العلاقة (59)

1-13 التكامل السطحي للمجال

Surface integration of vector field

نفرض أن مجال متجه vector field كثافته $\vec{A}$ يقطع نحو الخارج سطحاً مغلقاً يحيط بحجم معين τ وكما هو موضح في الشكل (15)



لمعرفة فيض المجال الخارج من هذا السطح نتصور أن السطح مجزء الى مساحات تفاضلية مقدار كل جزء ds .

أن الفيض الخارج من هذا السطح التفاضلي يساوي حاصل ضرب مساحة السطح في المركبة A_n .
المركبة A_n هي المركبة العمودية على السطح.

∴ الفيض الذي يخرج من هذا السطح التفاضلي ds يساوي ما يلي

$$d\psi = A_n\, ds = \vec{n}\cdot\vec{A}\, ds$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds = \vec{A}\cdot d\vec{s} \qquad (60)$$

تمثل $\vec{n}$ وحدة متجه عمودية على السطح التفاضلي ds

ولإيجاد الفيض الكلي الذي يقطع السطح S نجري عملية التكامل للعلاقة (60)

$$\int d\psi = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds \Leftarrow \text{تكامل سطحي}$$

$$\therefore \psi = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} \qquad (61)$$

تكامل سطحي ← surfac integral

* التكامل في العلاقة (61) يمثل التكامل السطحي لمركبة المجال العمودية على السطح، العمودية على جميع اجزاء السطح المغلق.

closed surface

* السطح المغلق: هو سطح محدود يقسم حجماً معيناً الى قسمين داخلي وخارجي. والسطح المغلق نفسه سطح غير محدد أذ لايمكن رسم منحني فيه ليمثل حافة هذا السطح.

open surface

* السطح المفتوح: هو السطح الذي يحدد بمنحني ، على سبيل المثال صفحة الكتاب تمثل سطح مفتوح وحافة الورقة تعد المنحني الذي يحددها.

* أما إشارة التكامل فتعتمد على إشارة اتجاه العمود على السطح. إذ تكون هذه الإشارة موجبة عندما يرسم العمود نحو الخارج. وعلى هذا الأساس يكون الفيض الداخل الى الحجم τ سالباً والفيض الخارج منه موجباً.

1 - 14 تفرق المجال ومبرهنة كاوس

The divergence of field and Gauss's theorem

لقد تم فيما سبق تعريف $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ الذي يمثل حاصل الضرب العددي بين المؤثر $\vec{\nabla}$ والمتجه $\vec{A}$ والذي ينتج عنه دالة عددية تسمى تفرق أو تباعد مجال المتجه $\vec{A}$.

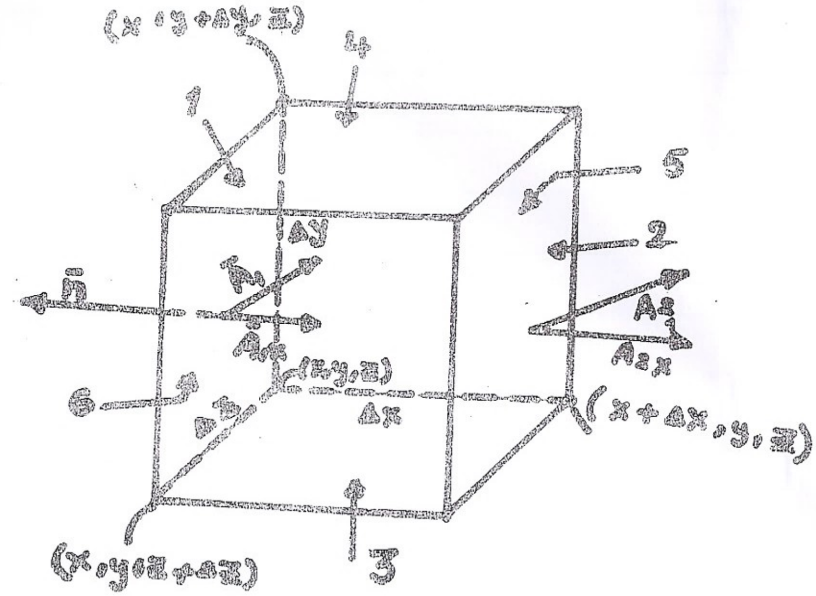
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{divergence of } \vec{A} = \text{div } \vec{A}$$

والذي يعطى بما يلي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \text{.......} (62)$$

هذه العلاقة مهمة جداً تستخدم كثيراً في حقول مختلفة وخاصة في علم الموائع Hydrodynamics.

الآن سوف نجد الفيض الذي كثافته $\vec{A}$ الخارج من سطح مغلق يحيط بحجم محدد متناهي في الصغر وسوف نفرض أن الحجم عبارة عن مكعب صغير جداً أبعاده Δx و Δy و Δz وأن أضلاعه توازي المحاور الثلاثة المتعامدة x و y و z حيث أن احداثيات نقطة الأصل فيها هي x و y و z (انظر الشكل (16)).



الشكل (16) :

الأن لمعرفة الفيض الخارج من هذا المكعب يجب أن نجد الفيض الخارج من كل وجه من أوجه المكعب الستة.
أولاً سوف نبدأ بحساب الفيض الخارج من الوجه رقم (1) والذي يكون عمودي على المحور x .

أن الفيض الخارج من الوجه رقم 1 الموضح في الشكل (16) يساوي التكامل السطحي لمركبة المجال A_{1x} مأخوذة لجميع اجزاء هذا الوجه

$$\psi_{1x} = -\int A_{1x}\, \underbrace{dy\, dz} \qquad \text{--- } 63$$

الأشارة تدل على أن أتجاه الفيض الى الداخل

هذا المقدار يمثل مساحة الوجه

وبما أن المكعب صغير جداً ، عليه أصبح التكامل في العلاقة (63) بحيث نكتب كالآتي

$$\psi_{1x} = -A_{1x}\,\Delta y\,\Delta z \quad ---(64)$$

وكذلك بالنسبة للفيض الخارج من الوجه 2 :

$$\psi_{2x} = +A_{2x}\,\Delta y\,\Delta z \quad ---(65)$$

وبما أن المركبة A_{1x} تختلف قليلاً عن A_{2x} (وذلك لأن الحجم متناهي في الصغر) إذن يمكن أن نكتب الآتي :

$$A_{2x} = A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \quad ---(66)$$

نعوض (66) في (65) نحصل

$$\psi_{2x} = \left(A_{1x} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\,\Delta z \quad ---67$$

∴ محصلة الفيض الخارج من الوجهين (1) و (2) باتجاه محور X تكون :

$$\psi_x = \psi_{1x} + \psi_{2x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad ---68$$

وبإتباع نفس الخطوات نحسب الفيض الخارج من الوجهين (3) و (4) باتجاه محور y :

$$\psi_y = \psi_{3y} + \psi_{4y} = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad ---(69)$$

والفيض الخارج من الوجهين (5) و (6) باتجاه محور Z :

$$\psi_z = \psi_{5z} + \psi_{6z} = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad ---(70)$$

∴ الفيض الخارج من الأوجه الستة للمكعب هو :

$$\Psi = \Psi_x + \Psi_y + \Psi_z$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta\tau} \quad --- (71)$$

تباعد مجال المتجه — حجم المكعب

إذن يمكن كتابة العلاقة 71 كالآتي :-

$$\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\Delta\tau \quad --- 72$$

تكامل سطحي

∴ الفيض الخارج من سطح مكعب متناهي في الصغر يساوي حاصل ضرب تباعد مجال المتجه في حجم ذلك المكعب .

∴ تباعد مجال اي متجه مثل $\vec{A}$ في نقطة معينة هو الفيض الخارج لوحدة الحجم المجاور لتلك النقطة .

∴ لحجم محدد يمكننا أن نثبت أن الفيض الكلي الخارج من هذا الحجم يساوي حاصل جمع الفيض الخارج من جميع أجزائه المأخوذة بصورة منفصلة ، وبما أن حاصل الجمع هذا يساوي تكامل تباعد المجال $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ مأخوذ على كل أجزاء الحجم τ المحاط بالسطح s ، وبذلك يمكن أن نكتب الآتي :

$$\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau \quad --- 73$$

هذه المبرهنة تسمى كاوس .

نص مبرهنة كاوس

تنص مبرهنة كاوس على ان تكامل المركبة العمودية لأي متجه على سطح مغلق يساوي تكامل تباعد مجال ذلك المتجه مأخوذاً لجميع أجزاء الحجم المحاط بذلك السطح.

في العلاقة (73) يمثل S سطح مغلق وأن τ يمثل الحجم الذي بداخله. وعندما يكون الحجم صغير جداً فأنه يمكن اعتبار $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ثابته وبذلك يصبح الطرف الأيمن من العلاقة (73) مساوي الى

$$\therefore \int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\tau \qquad \text{---}(74)$$

$$\therefore \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{\text{تباعد مجال المتجه } \vec{A}} = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\underset{\text{الحجم}}{\tau}} \underbrace{\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s}}_{\text{الفيض الخارج}} \qquad \text{---}(75)$$

فيض المجال الخارج

سؤال:
أثبت أن تباعد مجال متجه مثل $\vec{A}$ يساوي فيض المجال الخارج لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم من الصفر.

سؤال:
أثبت أن مبرهنة كاوس تعطى بما يلي

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau$$