(9) انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستوية في الفراغ

إذا كان الوسط الذي تنتقل فيه الموجة المستوية هو الفراغ فأن

$$\boxed{\begin{aligned}\mu &= \mu_0\\ \epsilon &= \epsilon_0\\ \vec{j}_f &= 0\end{aligned}} \longrightarrow$$

وبالتعويض في معادلة الموجة (74) نحصل على

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad --- 81$$

وبأخذ الاعتماد على الزمن نكتب العلاقة اعلاه كالآتي

$$\nabla^2\vec{E}\, e^{i\omega t} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}\, e^{i\omega t} = 0$$

$$\nabla^2\vec{E}\, e^{i\omega t} - \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{i\omega t}\right)\vec{E} = 0$$

حيث أن :

$$\frac{\partial^2 e^{i\omega t}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{i\omega t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega e^{i\omega t}\right)$$

$$= i\omega\frac{\partial}{\partial t}e^{i\omega t} = (i\omega)(i\omega)\,e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\therefore \nabla^2\vec{E}\,\cancel{e^{i\omega t}} - \mu_0\epsilon_0(-\omega^2)\cancel{e^{i\omega t}}\,\vec{E} = 0$$

$$\therefore \nabla^2\vec{E} + \mu_0\epsilon_0\omega^2\vec{E} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\right) +$$

$$\mu_0\epsilon_0\omega^2\left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\right) = 0 \quad ---(82)$$

وبما أنه E_z يساوي صفر او ثابت لهذه

$$\vec{i}\left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x\right)$$

$$+\vec{j}\left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y\right)$$

$$+\vec{k}\left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_z} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_z}\right) +$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \cancel{\vec{k}E_z}\right) = 0$$

الحدود المؤشرة كلها تساوي صفر وعليه نحصل على المعادلة التالية

$$\vec{i}\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + \vec{j}\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y + \mu_0\epsilon_0\omega^2\left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y\right) = 0$$

من العلاقة الاخيرة يمكن أن نكتب العلاقات الآتية

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + \mu_0\epsilon_0\omega^2 E_x = 0 \quad --- 83$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y + \mu_0\epsilon_0\omega^2 E_y = 0 \quad --- 84$$

للسهولة سوف نفترض وجود المركبة E_x فقط وبعبارة أخرى يمكن أن ندوّر المحاور x و y حول المحور z حتى ينطبق المتجه $\bar{E}$ باتجاه المحور x .
وحل المعادلة (83) يمكن أن نكتب الحل التجريبي الآتي :

$$\bar{E} \Rightarrow \bar{E}_x = \vec{i}\,E_{0x}\, e^{\gamma z} \quad --- 85$$

وحدة متجه

وحدات γ هي $\frac{1}{\text{وحدة طول}}$

نعوض (85) في (83) نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial}{\partial Z}E_x\right)=\frac{\partial}{\partial Z}\left(E_{ox}e^{\gamma Z}\gamma\right)=\gamma E_{ox}e^{\gamma Z}\gamma$$

$$=\gamma^2 E_{ox}e^{\gamma Z}$$

نحصل على :

$$\gamma^2 \cancel{E_{ox}}\cancel{e^{\gamma Z}}+\epsilon_0\mu_0\omega^2\cancel{E_{ox}}\cancel{e^{\gamma Z}}=0$$

$$\therefore \gamma^2+\epsilon_0\mu_0\omega^2=0$$

$$\gamma^2=-\epsilon_0\mu_0\omega^2$$

$$\gamma=\pm\sqrt{-\epsilon_0\mu_0\omega^2}$$

$$\therefore \gamma=\pm\sqrt{-1}\,\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}=\pm i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \quad \text{--- } 86$$

$$\because \sqrt{\epsilon_0\mu_0}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

$$\therefore \gamma=\pm i\frac{\omega}{c}=\pm ik$$

حيث أن وحدات k هي $\frac{1}{\text{وحدة طول}}$

ويمثل γ معامل الانتشار

k العدد الموجي

c هي سرعة الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ وتساوي تقريباً $3\times10^{8}\ m/sec$

وبما أن ω قيمة حقيقية و c قيمة حقيقية إذن γ لا تكون خيالية وهذا يعني أن المعادلة (85) هي تمثل دالة جيبية للمتجه $\vec{E}=\vec{E}_x$

وعليه يمكن أن نكتب العلاقة (85) كالآتي:

$$\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_x = \vec{i}\, E_{ox}\, e^{\pm ikZ}$$

وبأخذ الدالة المعتمدة على الزمن $e^{i\omega t}$ بنظر الاعتبار نحصل على

$$\vec{E}_x = \vec{i}\, E_{ox}\, e^{i\omega t}\, e^{\pm ikZ}$$

← المتجه يعتمد على الزمن والمسافة

$$\boxed{\therefore \vec{E}_x = \vec{i}\, E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kZ)}} \quad --- 87$$

ملاحظات

1- أن الإشارات ± التي تسبق k في العلاقة (87) تعني أن الموجة يمكن أن تنتشر في الاتجاهين $+Z$ و $-Z$.

2- الحل (87) يجب أن يحقق جميع معادلات ماكسويل لأن معادلة الموجة التي يحققها هذا الحل قد أشتقت بأستخدام معادلات ماكسويل.

الآن يجب الحصول على علاقة خاصة بالمتجه $\vec{H}$ ولذلك سوف نستفاد من معادلات ماكسويل وهي معادلة ماكسويل الأولى التي تربط بين $\vec{H}$ و $\vec{E}$

معادلة ماكسويل الأولى $\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & \cancel{E_y} & \cancel{E_z} \end{vmatrix} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z\right) e^{i\omega t}$$

حيث أن $E_z = 0$ و $E_y = 0$ حسب افتراضنا أن المتجه $\vec{E}$ له فقط مركبة بإتجاه x

$$E_x \Rightarrow E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kz)}$$

$$\vec{j}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 i \omega e^{i\omega t}\, \vec{j}\, H_y$$ ← المعادله خاصه بالمحور y

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\mu_0 \omega H_y e^{i\omega t} \quad \text{---} \quad 88$$

نعوض عن $\frac{\partial E_x}{\partial z}$:

$$\pm E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kz)}\, ik = -i\mu_0 \omega H_y \Longrightarrow H_y e^{i\omega t}$$

نعتمد على الزمن والبعد

$$\therefore \pm ik E_x = -i\mu_0 \omega H_y$$

لو تم اختيار الأتجاه −

$$\therefore -ik E_x = -i\mu_0 \omega H_y$$

$$\therefore H_y = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_x$$

$$\therefore H_y = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_{ox}\, e^{i(\omega t \pm kz)}$$

ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة كالآتي

$$H_y = H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm kZ)} \quad ---\ 89$$

حيث أن

$$H_{oy} = \frac{k}{\mu_o \omega} E_{ox}$$

$$\frac{1}{Z_o} \Longleftarrow$$ Z_o تمثل الممانعة المميزة للموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ

$$\therefore H_{oy} = \frac{E_{ox}}{Z_o}$$

$$\therefore Z_o = \frac{\mu_o \omega}{k} = \mu_o C = \mu_o \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$$

$$\therefore Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 376.6\ \Omega \quad ---\ 90$$

مما تقدم نستنتج أن الموجه الكهرومغناطيسيه المستوية التي تنتشر في الفراغ يكونه لها متجهان $\vec{E}$ و $\vec{H}$ عموديين على بعضهما البعض وهما نفس الطور و يكونان عموديين على خط أنتشار الموجه Z .

ويمكن أن نكتب العلاقة 89 كالآتي

$$\vec{H}_y = \vec{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t \pm kZ)} \quad ---\ 91$$

ملاحظات مهمة حول الحل :
عندما تنتشر الموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ نجد أن :

1 - العدد الموجي

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_o \mu_o}$$

2 - سرعة الموجة

$$c = 3 \times 10^{8}\ m/sec$$

3 - الممانعة المميزة

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 376.6\ \Omega = 120\pi\ \Omega$$

4 - يمكن أيضاً إيجاد متجه بوينتنك

واجب : جد $\vec{N}$ ⟵ $\vec{N} = \vec{E}_x \times \vec{H}_y$

لكي تثبت أن اتجاه $\vec{N}$ سيكون باتجاه المحور Z
وكما هو موضح في الشكل ادناه (الشكل 4) .