مثال (3)

اشتق معادلة الاستمرارية التي تعبر عن قانون حفظ الشحنة والتي تنص على أن

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

وذلك باستخدام معادلات ماكسويل.

صيغة أخرى للسؤال:
اثبت أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ وذلك بالاستفادة من معادلات ماكسويل.

الحل:
بالاستفادة من معادلة ماكسويل الثانية والتي تنص على أن

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

نأخذ $(\vec{\nabla}\cdot)$ التفرق لطرفي المعادلة:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{\text{يساوي صفر}} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

لأنه تفرق أي دوار يساوي صفر $\Rightarrow \therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

والتي يمكن أن تكتب كالآتي:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) = 0$$

وباستخدام معادلة ماكسويل الرابعة $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$

نحصل على:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$$

و.هـ.م

## 5. الصيغة العقدية لمتجه بوينتنك

أن الموجه الكهرومغناطيسية تكتب عادةً (وكما سنرى في الفقرات اللاحقة) على شكل دالة أسية عقدية وهذا لا يعني أن $\vec{E}$ و $\vec{H}$ هما مقدارات عقديات وإنما تكتب بهذه الصيغة لسهولة التكاملات الرياضية:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad ---- 53$$

حيث أن $i = \sqrt{-1}$ .

ما سبق يعني أن الدالة التي تمثل الموجة الكهرومغناطيسية المستوية يمكن أن تمثل بدالة جيب sin أو دالة جيب تمام cos، اي أن الموجة يمكن أن تمثل بالمقدار الحقيقي لهذه الدالة الأسية بغض النظر عن $i$ .

مثال على ذلك: كل من $\vec{E}$ و $\vec{H}$ يمكن أن يمثلان كالآتي

$$\vec{E}_x = \vec{i}\, E_{ox} \sin(\omega t - kz) \quad --- 54$$

$$\vec{H}_y = \vec{j}\, H_{oy} \sin(\omega t - kz) \quad --- 55$$

$\vec{i}$ وحدة المتجه بإتجاه المحور x .

$\vec{j}$ " " " " y .

$k$ يمثل مقدار ثابت يسمى العدد الموجي .

$E_{ox}$ تمثل الى القيمة لـ $\vec{E}_x$

$H_{oy}$ " " " لـ $\vec{H}_y$

الآن سوف نجد متجه بوينتنك $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E}_x \times \vec{H}_y$$

$$= \left[\vec{i}\, E_{ox} \sin(\omega t - kZ)\right] \times \left[\vec{j}\, H_{oy} \sin(\omega t - kZ)\right]$$

$$\vec{N} = (\vec{i} \times \vec{j})\, E_{ox} H_{oy} \sin^2(\omega t - kz)$$

ومعا أن $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

حيث أن $\vec{k}$ يمثل وحدة المتجه بأتجاه المحور $Z$

$$\therefore \vec{N} = \vec{k}\, E_{ox} H_{oy} \sin^2(\omega t - kz) \quad \text{---- } 56$$

ولحساب معدل متجه بوينتنك فأننا نأخذ المعدل الزمني للمعادلة 56 ولدورة واحدة $T$ لان الدالة تعيد نفسها في كل دوره

$$\therefore N_{avr} = E_{ox} H_{oy} \int_0^T \sin^2(\omega t - kz)\, dt \quad \text{--- } 57$$

average ← معدل

حيث أن $T = \frac{2\pi}{\omega}$

واجب : أثبت أن $\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - kZ)\, dt = \frac{1}{2}$

∴ معدل متجه بوينتنك :

$$N_{avr} = \frac{1}{2} E_{ox} H_{oy} \quad \text{----} \; 58$$

الأن سوف نستخدم الصيغ الأسية المتمثلة بالعلاقات (54) و (55) لكل من المتجهين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ ونجد حاصل الضرب المتجهي

$$\vec{E}_x \times \vec{H}_y = \vec{k} E_{ox} H_{oy} e^{2i(\omega t - kZ)}$$

نأخذ الجزء الحقيقي للطرفين :

Real part of ⇒ Re

$$Re(\vec{E}_x \times \vec{H}_y) = Re\left(\vec{k} E_{ox} H_{oy} \underbrace{e^{2i(\omega t - kZ)}}_{\text{كمية عقدية}}\right)$$

$$= \vec{k} E_{ox} H_{oy} Re\left(e^{2i(\omega t - kZ)}\right) \quad \text{--} \; 59$$

حيث أن :

$$e^{i2(\omega t - kz)} = \underbrace{\cos 2(\omega t - kz)}_{\text{الجزء الحقيقي Real part}} + \underbrace{i \sin 2(\omega t - kz)}_{\text{الجزء الخيالي imaginary part}}$$

$$\therefore Re\left(e^{i2(\omega t - kz)}\right) = \cos 2(\omega t - kz)$$

الأن نجد $N_{avr}$ لهذه الصيغة :

$$Re(\vec{E}_x \times \vec{H}_y) = \vec{k} E_{ox} H_{oy} \cos 2(\omega t - kz) \quad \text{--} \; (60)$$

الآن لو أخذ المعدل الزمني على الدالة المعتمدة على $t$ ولدورة واحدة $T$ نجد أن

$$\int_0^T \cos 2(\omega t - kz)\, dt \neq \frac{1}{2}$$

وإنما ← $= \text{zero}$

وهذا يعني أن صيغة $N_{avr}$ في العلاقة (58) غير صحيحة.
ولابد من إيجاد الصيغة الصحيحة كالآتي:
سوف نجد حاصل الضرب المتجهي الآتي

$$\vec{E}_x \times \vec{H}_y^* \;??$$

حيث أن $\vec{H}_y^*$ هو المرافق العقدي للمتجه $\vec{H}_y$

$$\because \vec{H}_y = \vec{j}\, H_{oy}\, e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{H}_y^* = \vec{j}\, H_{oy}\, e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$\therefore \vec{E}_x \times \vec{H}_y^* = \vec{i}\, E_{ox}\, e^{\cancel{i(\omega t - kz)}} \times \vec{j}\, H_{oy}\, e^{\cancel{-i(\omega t - kz)}}$$

$$= (\vec{i} \times \vec{j})\, E_{ox} H_{oy} = \vec{k}\, E_{ox} H_{oy} \quad \text{--- } 61$$

اما معدل هذا الناتج فهو يساوي $E_{ox} H_{oy}$ وهو لا يساوي معدل متجه بوينتنك في العلاقة (58) ألا بعد ضربه بـ $\frac{1}{2}$ وعليه فأن المعدل الزمني لمتجه بوينتنك يمكن أن يحسب وفقاً للعلاقة الآتية

$$N_{avr} = \frac{1}{2} Re\,(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad \text{--- } 62$$

مثال (4)

موجة كهرومغناطيسية مستوية جيبية تنتشر في الهواء أحسب كثافة الطاقة الكهربائية وكثافة الطاقة المغناطيسية لهذه الموجة وأثبت انهما متساويتان .

الحل : من المعروف أن

$$\vec{E}_x = \vec{i}\, E_{ox} \sin(\omega t - kz) \longleftarrow$$ لا يشترط كتابة x لانها موضحة من خلال $\vec{i}$

$kz$ كالبعد

$$\vec{H}_y = \vec{j}\, H_{oy} \sin(\omega t - kz) \longleftarrow$$ لا يشترط كتابة y لانها موضحة من خلال وحدة المتجه $\vec{j}$

$z$ بعد

كذلك نحتاج العلاقة $E_o = Z_o H_o$ حيث أن $Z_o$ هي الممانعة المميزة للموجة في الهواء وهي تساوي :

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \Longleftarrow$$ والتي سنأتي على توضيحها في الفقرات القادمة

$$\text{كثافة الطاقة الكهربائية} = \frac{1}{2}\epsilon_o E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_o E_o^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

$$\text{كثافة الطاقة المغناطيسية} = \frac{1}{2}\mu_o H^2 = \frac{1}{2}\mu_o H_o^2 \sin^2(\omega t - kz)$$

وبما أن :

$$H_o^2 = \frac{E_o^2}{Z_o^2} = \frac{E_o^2}{(\mu_o/\epsilon_o)} = \frac{\epsilon_o E_o^2}{\mu_o}$$

$$\therefore \text{كثافة الطاقة المغناطيسية} = \frac{1}{2}\cancel{\mu_o}\frac{\epsilon_o E_o^2}{\cancel{\mu_o}} \sin^2(\omega t - kz)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_o E_o^2 \sin^2(\omega t - kz) = \text{كثافة الطاقة الكهربائية}$$