4 - متجه بوينتنك Poynting Vector

الآن سوف نناقش انسياب الطاقة الكهرومغناطيسية من خلال سطح مغلق يحيط بحجم معين وعلاقته بالتغير في الطاقة المخزونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي.
سوف نبدأ من علاقات ماكسويل الأولى والثانية

معادلتي الدوار لماكسويل
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{--- (9)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{--- (26)} \end{cases}$$

تضرب المعادله (9) بـ $\vec{H}\cdot$ ← ضرب عددي
تضرب المعادله (26) بـ $\vec{E}\cdot$ ← ضرب عددي

نحصل على :

$$\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{--- 41}$$

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{E}\cdot\vec{j} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{--- 42}$$

بطرح العلاقة (42) من العلاقة (41) نحصل على :

$$\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\vec{j} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{--- 43}$$

وباستخدام المطابقة :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}$$

لكتابة ما يلي :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) \quad \text{--- 44}$$

ومقارنة (43) مع (44) نحصل على ما يلي :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\vec{j} \qquad ---45$$

الآن نأخذ التكامل الحجمي للحجم τ (الذي يحيطه السطح S) لطرفي المعادلة (45) نحصل على:

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,d\tau = -\int_\tau\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau(\vec{E}\cdot\vec{j})\,d\tau \qquad ---46$$

ملاحظة $\vec{A}$ اي متجه

وباستخدام مبرهنة كاوس $\boxed{\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d\tau}$

لتحويل التكامل الحجمي في الطرف الأيسر من المعادلة (46) الى تكامل سطحي:

$$\therefore \int_s(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{s} = -\int_\tau\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)d\tau - \int_\tau(\vec{E}\cdot\vec{j})\,d\tau \qquad ---47$$

العلاقة (47) تم ايجادها من قبل العالم بوينتنك عام ١٨٨٤ لذلك سميت نظرية بوينتنك. ويسمى حاصل الضرب المتجهي $\vec{E}\times\vec{H}$ بمتجه بوينتنك وهو يمثل الطاقة من وحدة الزمن (يعني القدرة) التي تنساب من وحدة السطوح في اية نقطة على السطح المغلق وسوف نرمز له بالرمز $\vec{N}$.
وبذلك يمكن كتابة العلاقة 47 كالآتي

$$\int_s \vec{N}\cdot d\vec{s} = -\underbrace{\int_\tau\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)d\tau}_{\text{الحد الاول من الطرف الايمن}} - \underbrace{\int_\tau(\vec{E}\cdot\vec{j})\,d\tau}_{\text{الحد الثاني من الطرف الايمن}} \qquad ---48$$

ماذا يمثل كل حدمن هذه المعادلة ؟؟

* يمثل الطرف الايسر من هذه المعادلة $\left(\int_S \vec{N} \cdot d\vec{S} \right)$ الطاقة الكهرومغناطيسية التي تنساب من السطح المغلق $\bar{S}$ الذي يحتوي الحجم τ في وحدة الزمن.

* يمثل الحد الاول من الطرف الايمن من هذه المعادلة :

$$\left(-\int_\tau \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau \right)$$

مقدار النقصان في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الحجم τ من ذلك الوسط.

* أما الحد الثاني من الطرف الأيمن من هذه المعادلة :

$$\left(-\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J})\, d\tau \right)$$

سوف نناقش معناه الفيزيائي كالآتي :

نفرض أن σ تمثل قابلية التوصيل الكهربائي للوسط و $\vec{E}'$ تمثل شدة المجال للقوة الدافعة الكهربائية التي تجهز النظام بالطاقة :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}') \quad --- (49)$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}' \quad --- (49)$$

$\therefore$ الحد الثاني من الطرف الايمن من المعادلة (48) على أن يكتب كالآتي

$$-\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{J}) d\tau = -\int_\tau \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \int_\tau (\vec{E}' \cdot \vec{J})\, d\tau$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ (-1) نحصل على

$$\int_{\tau} (\vec{E} \cdot \vec{j})\, d\tau = \underbrace{\int_{\tau} \frac{j^2}{\sigma}\, d\tau}_{(*)} - \underbrace{\int_{\tau} (\vec{E}' \cdot \vec{j})\, d\tau}_{(**)} \quad \ldots 50$$

(*) هذا الحد يمثل القدرة المفقودة على شكل حرارة بسبب مقاومة الوسط .

(**) هذا الحد يمثل القدرة التي تجهزها القوة الدافعة الكهربائية للوسط للتعويض عن الجزء المفقود على شكل حرارة اي التعويض عن الفقدان الذي يحصل في الطاقة الكهرومغناطيسية المخزونة في الوسط .

(***) اما الجزء المتبقي من هذه القدرة والذي ينساب خارج السطح S الذي يحوي الحجم τ فهو يمثل الطرف الايسر من العلاقة (48)

$$\int_{S} \vec{N} \cdot d\vec{s} = \int_{S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$$

وبتعويض العلاقة (50) في العلاقة (48) نحصل على :

$$\int_{S} \vec{N} \cdot d\vec{s} = -\int_{\tau} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\tau - \int_{\tau} \frac{j^2}{\sigma}\, d\tau + \int_{\tau} (\vec{E}' \cdot \vec{j})\, d\tau \quad \ldots 51$$

المعادلة (51) ايضاً تمثل نظرية بوينتنك .

سؤال (1)

ما هي صيغة معادلة (نظرية بوينتنك) المعادلة (51) عندما يكون الوسط متجانس خطياً ومتماثل الصفات ؟

الجواب : عندما يكون الوسط متجانس خطياً ومتماثل الصفات فأن :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \in \vec{E}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \in \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

نعوض هذه العلاقات في العلاقة (51) نحصل على :

$$\int_s \vec{N} \cdot d\vec{s} = -\int_\tau \left[\vec{E} \cdot \left(\in \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \left(\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \right] d\tau - \int \frac{j^2}{\sigma} d\tau + \int_\tau (\vec{E}' \cdot \vec{j}) d\tau$$

$$\therefore \int_s \vec{N} \cdot d\vec{s} = -\int_\tau \left[\in \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] d\tau - \cdots \cdots \quad 52$$

توضيح

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial E^2}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

وبما أن الضرب عددي

$$\therefore \frac{\partial E^2}{\partial t} = 2 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وبنفس الطريقة $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}H^2 = \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

الآن نعوض في العلاقة (52)

$$\therefore \int_S \vec{N}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) d\tau - \int \frac{j^2}{\sigma}\, d\tau + \int_\tau (\vec{E}'\cdot\vec{j})\, d\tau$$

ملاحظة
تم أخراج $\frac{\partial}{\partial t}$ من
تكامل الحدين .

المعادلة الأخيرة يمكن أن تكتب كالآتي

$$\therefore \int_S \vec{N}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) d\tau + \int \frac{j^2}{\sigma}\, d\tau = \int_\tau (\vec{E}'\cdot\vec{j})\, d\tau \quad \text{---} 52$$

سؤال (2) / واجب

اكتب المعنى الفيزيائي لكل حد من حدود المعادلة (52) .