Forces and torques — القوى و العزوم 4-7

لقد وضحنا سابقاً طريقة حساب الطاقة الكهربائية المستقرة لحيز يحتوي شحنات نقطية وأجسام موصلة او غير موصلة مشحونة.
أما في هذه الفقرة سوف نحسب القوة المؤثرة على احد هذه الاجسام المشحونة.

نفرض أن حيز معين يضم فقط أجسام موصلة مشحونة فعندما يحصل اي تغير في ترتيب منظومة الأجسام هذه بفعل القوى المتولدة بينها ينجز شغل فستتغير بذلك طاقتها الكامنة اذا كان هذا الحيز بمعزل اي اي مصدر للطاقة خارجي.

نفرض الآن أن أحد هذه الأجسام تحرك مسافة تفاضلية مقدارها dl نتيجة تأثير قوة معينة عليه مركبتها باتجاه الأزاحة تساوي F_l . فإذا كانت الشحنات على كل هذه الأجسام ثابتة فإنه الشغل يأخذ الصيغة التالية:

$$dW_Q = -F_l\, dl \quad --- \quad 50$$

$$\therefore F_l = -\frac{\partial W_Q}{\partial l} \quad --- \quad 51$$

هنا الشغل W_Q يساوي الشغل في العلاقة [(34) و (35)]

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Phi_i Q_i \quad ---(34) \qquad , \qquad \Phi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j \quad --- 35$$

$$W_Q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_i Q_j \quad --- 52$$

معاملات الجهد

حيث اننا افترضنا أن الشحنات ثابتة.

وبما أن الشحنات ثابتة فأن التفاضل يكون لمعاملات الجهد P_{ij}
والذي يعد المتغير variable وعليه يمكن ان نكتب :

$$dW_Q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial P_{ij}}{\partial l}\, Q_i Q_j \, dl \qquad ----53$$

لنفترض الآن أن احد الأجسام قد تحرك بينما تبقى الأجسام الأخرى في المنظومة ثابتة و لنتصور أن الأزاحة dl تمت على مرحلتين في المرحلة الاولى تبقى جميع الشحنات ثابتة وفي المرحلة الثانية أضيفت شحنات أخرى كافية لأرجاع قيم الجهود الى ما كانت عليه قبل البدء بالعملية .

أذن :

$$dW_\phi = dW_Q + dW \qquad ----54$$

- dW_ϕ : مقدار الزيادة الحاصلة في الطاقة بسبب الأزاحة على فرض أن الجهود ثابتة
- dW_Q : المرحلة الأولى
- dW : التغير الحاصل في الطاقة بسبب المرحلة الثانية

حيث أن W_ϕ في العلاقة (54) يعطى بما يلي

$$W_\phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\,\phi_i\,\phi_j \qquad ---55$$

الآن اذا فرضنا أن هذه الأجسام الموصلة في الحيز عددها N كما يتضح من العلاقات اعلاه فأن التغير الحاصل في جهد الجسم (i) خلال المرحلة الأولى يساوي

$$d\phi_i = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial P_{ij}}{\partial l}\, Q_j \, dl \qquad ---56$$

اما في المرحلة الثانية فقد تمت اضافة الشحنات
dQ_1 ، dQ_2 ، dQ_3 .... dQ_N الى هذه
الأجسام فتغيرت جهودها بكميات تساوي بالمقدار
وتعاكس بالإشارة لتلك التي حصلت في المرحلة
الأولى وعليه ينتج :

$$d\Phi_i = -\sum_{j=1}^{N} P_{ij}\, dQ_j \quad \text{-----} \quad 57$$

وهكذا فان التغير الحاصل في جهد الجسم i بعد انتهاء
المرحلة الثانية يساوي صفر .
اي أن :

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}\, dQ_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial P_{ij}}{\partial l} Q_j\, dl = 0 \quad \text{---} \quad 58$$

وعليه فان dW يمكن أن تكتب كالآتي

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i\, dQ_i \quad \text{---} \quad 59$$

$$\because \Phi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j$$

$$\therefore dW = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j\, dQ_i \quad \text{---} \quad 60$$

$\therefore$ العلاقة (60) تأخذ الصيغة التالية بعد أن نعوض
عن $P_{ij}\, dQ_j$ من العلاقة (58) حيث أن

$$\left[P_{ij}\, dQ_j = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial l} Q_j\, dl \right]$$

$\therefore$ المعادلة (60) تصبح

$$dW = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial P_{ij}}{\partial l} Q_i Q_j\, dl \quad \text{---} \quad 61$$

الآن بمقارنة المعادلة (53) والمعادلة (61) نجد أن

$$dW = -2\,dW_Q \quad --- \quad 62$$

نعوض في العلاقة (54)

$$dW_\phi = dW_Q - 2\,dW_Q$$

$$\therefore dW_\phi = -dW_Q \quad --- \quad 63$$

$$\therefore dW_\phi = -dW_Q = F_l\,dl$$

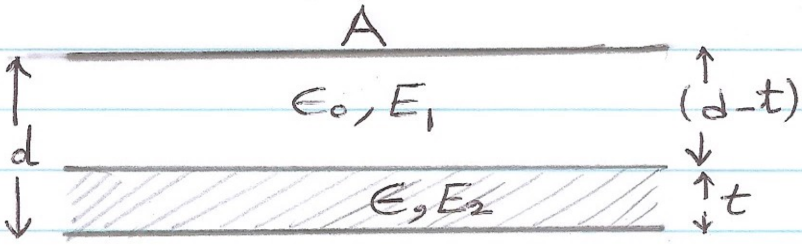
$$\therefore F_l = \frac{\partial W_\phi}{\partial l} \quad --- \quad 64$$

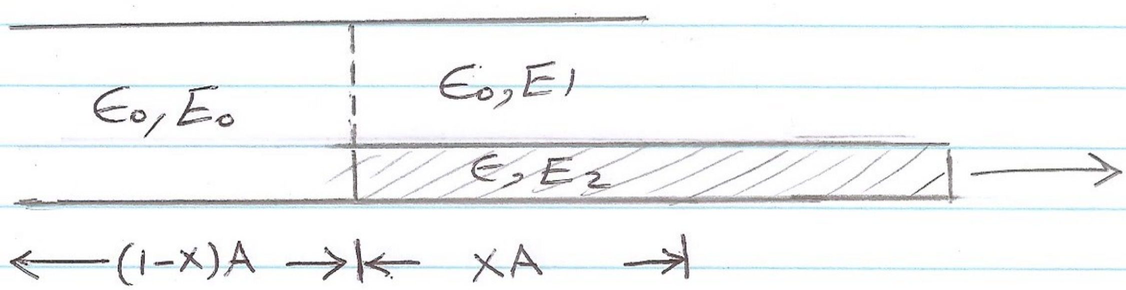
* هذه العلاقة توضح أن المتغير هو المعاملات C_{ij} بينما الجهود ثابتة.
* هذه النتيجة مفيدة جداً إذ أنها تبين أنه في حالة الجهود الثابتة أن الطاقة الكامنة تزداد بمقدار يساوي الشغل الميكانيكي المنجز.
* يعني أن المصادر ذات الجهود الثابتة تزود المنظومة بطاقة مضاعفة.

مثال: متسعة ذات لوحين متوازيين بينهما مسافة d ومساحة كل منهما A، أدخلت مادة عازلة بين اللوحين المتوازيين سماحيتها ϵ وسمكها $t<d$ ومساحة قاعدتها A تماثل مساحة لوحي المتسعة. فإذا أهمل تأثير النهايات وبقي فرق الجهد بين طرفي المتسعة ثابتاً ومساوياً الى V أحسب القوة المؤثرة على لوح المادة العازلة عندما يسحب خارج المتسعة ويبقى منها بين اللوحين المتوازيين مساحة مقدارها XA.

$XA \rightarrow X$ تمثل مقدار بدون وحدات

X تمثل جزء من المساحة او النسبة من المساحة المتبقي بين اللوحين.





فرق الجهد ثابت ويساوي V:

E_0 تمثل المجال قبل وضع المادة العازلة $\qquad \therefore \; E_0 = \dfrac{V}{d}$

اولاً نحسب الطاقة W:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \epsilon E^2 \, d\tau$$

حيث أن التكامل على الحجم يشمل المناطق التي لا يكون فيها المجال E يساوي صفر.
إذن يجب أن نعرف قيم المجالات الكهربائية E_0 و E_1 و E_2 . ولمعرفة ذلك نطبق شروط الحدود الفاصلة بين الوسطين العازلين :

$$\therefore \epsilon_0 E_1 = \epsilon E_2 \quad --- 1*$$

كذلك يمكن حساب الجهد الثابت من العلاقة التالية

$$V = E_2 t + E_1 (d-t) \quad —— 2*$$

وبحل المعادلتين 1* و 2* نحصل على :

$$E_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_2 \quad --- 3*$$

$$\therefore V = E_2 t + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_2 (d-t)$$

$$\epsilon_0 V = E_2 t \epsilon_0 + \epsilon E_2 (d-t)$$

$$\epsilon_0 V = E_2 \left(t\epsilon_0 + \epsilon(d-t)\right) = E_2 \left[t\epsilon_0 + \epsilon d - \epsilon t\right]$$

$$\epsilon_0 V = E_2 \left[\epsilon d + (\epsilon_0 - \epsilon) t\right]$$

$$\epsilon_0 V = E_2 \left[\epsilon d - (\epsilon - \epsilon_0) t\right]$$

$$\therefore E_2 = \frac{\epsilon_0 V}{\left[\epsilon d - (\epsilon - \epsilon_0) t\right]} \quad --- 4*$$

نعوض 4* في 3*

$$E_1 = \frac{\epsilon}{\cancel{\epsilon_0}} \frac{\cancel{\epsilon_0} V}{\left[\epsilon d - (\epsilon - \epsilon_0) t\right]} = \frac{\epsilon V}{\left[\epsilon d - (\epsilon - \epsilon_0) t\right]}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_{\tau_0} \epsilon_0 E_0^2 \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau_1} \epsilon_0 E_1^2 \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau_2} \epsilon E_2^2 \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 (1-x) A d + \frac{1}{2}\epsilon_0 \left\{\frac{\epsilon V}{(\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t)}\right\}^2 (d-t)\, x A$$

$$+ \frac{1}{2}\epsilon \left\{\frac{\epsilon_0 V}{\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t}\right\}^2 t\, x A$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 V^2 A \left\{\frac{1-x}{d} + \frac{\epsilon^2 (d-t) x + \epsilon\epsilon_0 t x}{[\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t]^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 V^2 A \left\{\frac{1-x}{d} + \frac{\epsilon x \underbrace{[\epsilon d - \epsilon t + \epsilon_0 t]}_{[\epsilon d - (\epsilon - \epsilon_0) t]}}{[\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t]^2}\right\}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\epsilon_0 V^2 A \left\{\frac{1-x}{d} + \frac{\epsilon x}{[\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t]}\right\}$$

الآن علينا أيجاد القوة ، الواضح من العلاقة الأخيرة أن W تعتمد على قيمة الكمية X التي تحدد جزء المادة المتبقية بين اللوحين وعليه

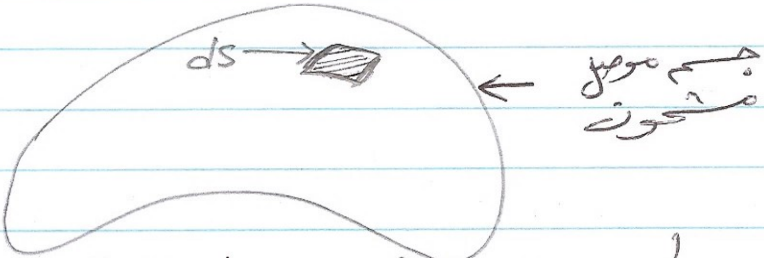
$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\epsilon_0 V^2 A \left\{\frac{-1}{d} + \frac{\epsilon}{\epsilon d - (\epsilon-\epsilon_0)t}\right\}$$

واجب //

حل السؤال (20) من اسئلة الفصل الرابع من الكتاب المنهجي ص ٢٣٨

4-8 القوة المؤثرة على جسم موصل مشحون

عندما توضع شحنة تفاضلية في مجال كهربائي تؤثر عليها قوة يكون اتجاهها باتجاه المجال الكهربائي المؤثر اذا كانت الشحنة موجبة.



الشحنة التفاضلية = σds

σ هي كثافة الشحنة السطحية والتي قد تكون دالة للموقع.
أن المجال الكهربائي الكلي E خارج السطح (خارج الجسم) وفي نقطة قريبة جداً من السطح التفاضلي ds :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

أن المجال الكهربائي الكلي يكون محصلة مجالين كهربائيين احدهما E_s صادر من الشحنة التفاضلية على السطح ds والآخر E_s صادر من جميع الشحنات الأخرى على سطح الجسم الموصل عدا السطح التفاضلي ds.

ولحساب المجال المتولد من الشحنة التفاضلية σds نحدد أولاً الفيض الكهربائي الكلي المنبعث من هذه الشحنة حيث أن $\frac{1}{2}$ الفيض الكهربائي الكلي المنبعث من هذه الشحنة يتجه داخل الجسم الموصل والنصف الآخر يتجه خارجه.
وعلى هذا الأساس وبتطبيق قانون كاوس نجد أن المجال الكهربائي خارج الجسم او داخله يكون مساوي الى :

$$E_s = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

وعليه :
فان المجال الكهربائي عند السطح ds يساوي

$$E_s' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

ما سبق يعني نصف المجال الكهربائي عند السطح ds ناتج من الشحنة التفاضلية والنصف الآخر ناتج من جميع الشحنات الأخرى بحيث أن مجموعهما يساوي المجال الكهربائي $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

كذلك أن E_s' يكون داخل الجسم الموصل مساوياً بالمقدار ومعاكس في الاتجاه للمجال الكهربائي E_s وذلك لتكون المجال الكهربائي داخل الجسم الموصل يكون مساوي للصفر.

أن القوة التي تؤثر في السطح التفاضلي ds تساوي حاصل ضرب الشحنة σds في المجال E_s' المتولد من جميع الشحنات الأخرى :

$$dF = E_s' \sigma ds = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma ds$$

وأن القوة المؤثرة لوحدة السطوح :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{1}{2}(\epsilon_0^2 E^2)\frac{1}{\epsilon} = \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}_{\text{تمثل كثافة الطاقة}}$$

كذلك يمكن أن نكتب dF كالآتي

$$dF = \frac{1}{2}\sigma \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds = \frac{1}{2}\sigma E ds$$

وبإجراء التكامل على جميع سطح الجسم الموصل نحصل على القوة الكلية التي تؤثر في المساحة السطحية للجسم

$$F = \frac{1}{2}\int_s \sigma E ds$$
