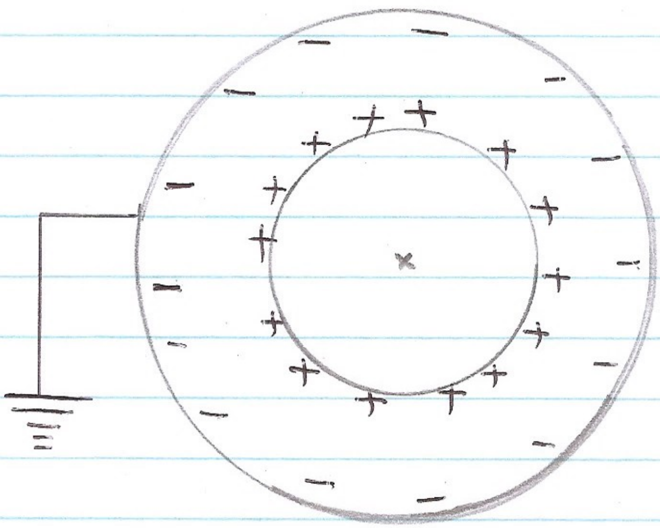
4.6 المتسعه

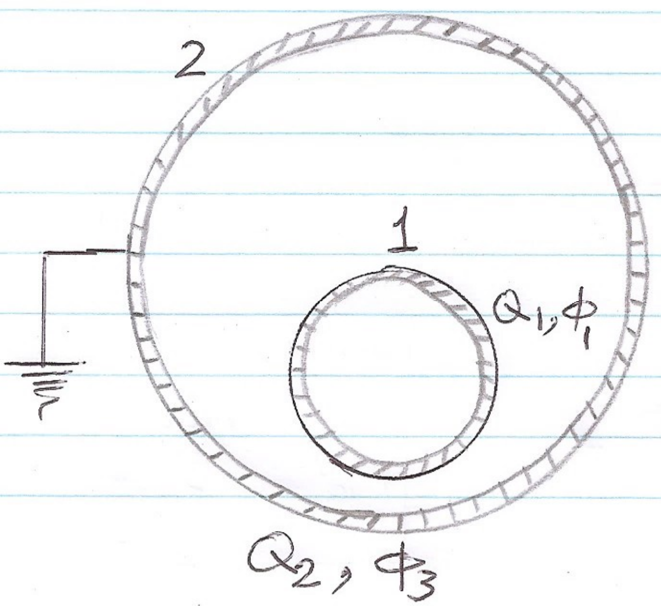
المتسعه هي نظام يتكون من جسمين موصلين يحملان شحنتين متساويتين بالمقدار و مختلفتين في الأشاره . مثال على ذلك : المتسعه الكرويه الموضحه في الشكل (3) وهي تتألف من كرتين موصلتين متحدتي المركز وضعت على احداهما (وهي الكره الداخليه) شحنه كهربائيه موجبه اما الخارجيه فقد تم توصيلها بالارض .

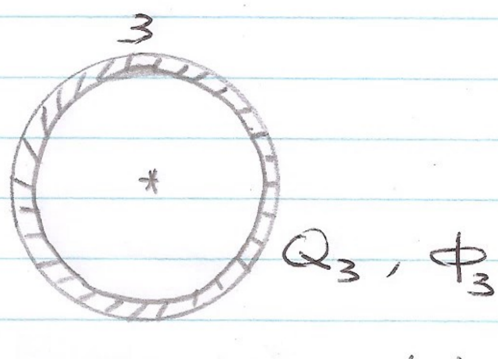
* أن ربط الكره الخارجيه بالارض ضروري لأن المتسعه في هذه الحاله ستكون بعيده عن تأثير الأجسام المجاوره الأخرى .

الشكل (3) :



الآن لنتصور ثلاث أجسام موصله وضعت عليها شحنات وعلى التوالي Q_1 و Q_2 و Q_3 حيث اصبح جهد كل منها ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 (انظر الشكل (4)) .





الشكل (4) :

واعتماداً على العلاقة (36) يمكن أن نكتب العلاقات التالية:

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3$$

$$Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 + C_{23}\phi_3 \qquad \text{---}(37)$$

$$Q_3 = C_{31}\phi_1 + C_{32}\phi_2 + C_{33}\phi_3$$

ملاحظة
(راجع العلاقة 36)

نفرض أن $Q_1 = 0$ ، لذلك يكون جهد الجسم الاول مساوي الى جهد الجسم الثاني، اي أن $\phi_1 = \phi_2$ وذلك لأن الحيز الذي يحويه الجسم الثاني سيكون في هذه الحالة منطقة تساوي جهد. (انظر الشكل (4)).
وعليه تصبح المعادلة الأولى من المعادلات (37) كالآتي

$$0 = C_{11}\phi_2 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3$$

الآن لو فرضنا كذلك أن $\phi_2 = 0$ اي أن الجسم الثاني متصلاً بالأرض ، يكون $\phi_1 = \phi_2$ وعليه نحصل على:

$$0 = C_{13}\phi_3$$

← ملاحظة: يتضح من هذه المعادلة أن $C_{13} = C_{31} = 0$

$$Q_2 = C_{23}\phi_3$$

$$Q_3 = C_{33}\phi_3$$

ماذا يعني ذلك ؟؟؟
نستنتج مما سبق أن معامل الحث يساوي صفراً بين جسمين موصلين محجوب كل منهما عن الآخر بسطح موصل. فالجسم الأول محجوب عن الجسم الثالث بواسطة السطح الموصل للجسم الثاني.

الآن لو فرضنا أن $Q_1 \neq 0$ وأن $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ والذي يعني ان كل من الجسمين الموصلين الثاني والثالث وُصِل بالأرض . إذن المعادلة (37) تصبح :

$$Q_1 = C_{11} \Phi_1$$

$$Q_2 = C_{21} \Phi_1$$

$$Q_3 = C_{31} \Phi_1 = 0 \qquad \text{حيث أن } C_{31} = 0$$

وبما أن سطح كاوس المرسوم داخل الجسم الثاني والذي يحيط بالفجوة التي فيها الجسم الأول لا يحوي في داخله اي شحنة كهربائية ينتج أن الشحنة Q_2 المستقرة على السطح الداخلي لهذه الفجوة لابد أن تساوي $-Q_1$.
وبذلك نحصل على

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \Phi_1 \\ Q_2 &= -Q_1 = C_{21} \Phi_1 \\ Q_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \therefore C_{21} = -C_{11}$$

C_{11} معامل السعه ، C_{21} معامل الحث .
ماذا يعني ذلك ؟؟؟
هذا يعني أن معامل الحث بين جسمين موصلين احدهما يحيط تماماً بالآخر يساوي بالمقدار ويخالف بالإشارة معامل السعه للجسم الموصل الداخلي . إذن فأي سطحين موصلين كالسطحين الاول والثاني (في الشكل (4)) يكونان ما يسمى بالمتسعه .

مما سبق توصلنا الى العلاقات التالية (التي تخص معامل السعة) :

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 \qquad --- \quad 38$$

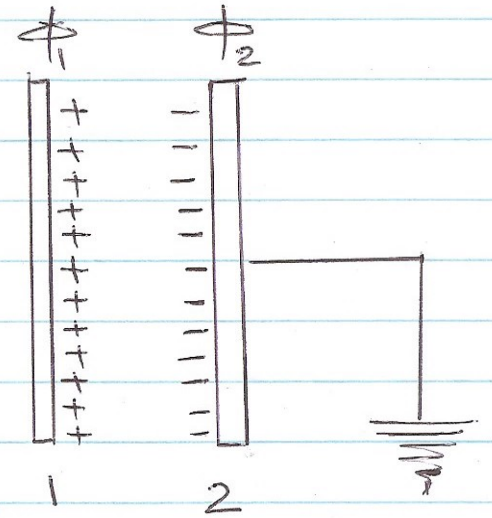
$$Q_3 = C_{33}\Phi_3 \qquad --- \quad 39$$

الواضح من العلاقات (38) و(39) أن كل علاقة مستقلة عن الأخرى. بمعنى أن اي تغيير من مقدار ونوعية الشحنة أو الجهد على الجسم الثالث لا يؤثر على الجهد أو الشحنة على الجسم الأول. أن هذه العملية تسمى عملية الدرع الكهروستاتيكي electrostatic shielding ، فأي جهاز كهربائي يمكن المحافظة عليه بعيداً عن التأثيرات الكهربائية الخارجية وذلك بأحاطته بغلاف موصل متصل بالأرض.

وهذه الظاهرة ذات فائدة عظيمة خاصة عندما يراد الحصول على قياسات دقيقة أو عندما يراد تصميم دائرة الكترونية يدخل في تركيبها بعض العناصر التي يجب حجبها لتكون بعيدة عن التأثيرات الكهربائية المتولدة من أجزاء أخرى تعود للدائرة نفسها او لدوائر أخرى.

وكمثال آخر والذي لا يقل أهمية عن المثال السابق ،
هو المتسعة ذات اللوحين المتوازيين
(Parallel plates capacitor)

تتكون هذه المتسعة من لوحين موصلين متوازيين قريبين جداً من بعضهما البعض ، فيهمل بذلك تأثير النهايات ويصبح المجال الكهربائي متمركزاً بأجمعه بين اللوحين المتوازيين ويتم تحقيق الشروط التي أشرنا لها سابقاً إذا تم توصيل أحد اللوحين بالأرض وشحن الآخر بشحنة موجبة مقدارها Q وكما يتضح من الشكل (5) .



الشكل (5)

الآن يمكن الاستفادة من العلاقة (35) ؛ $\boxed{\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j}$
حيث أن P_{ij} هي معاملات الجهد .

$$\Phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2$$

$$\because Q_1 = +Q \quad ، \quad Q_2 = -Q$$

Φ_1 و Φ_2 تمثل الجهد على اللوحين المتوازيين .

$$\therefore \Phi_1 = P_{11}(+Q) + P_{12}(-Q)$$

حيث أن $P_{12} = P_{21} \Leftarrow$

$$\Phi_2 = P_{21}(+Q) + P_{22}(-Q)$$

$\therefore$ فرق الجهد بين لوحي المتسعة هو:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})Q$$

$$\therefore (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})^{-1} = \frac{Q}{\Phi} \quad --- (40)$$

الآن/ تعرف سعة المتسعة بأنها الشحنة Q التي لو وضعت على احد لوحي المتسعة لتولد جراء ذلك فرق جهد Φ بينهما.
ويرمز لهذه السعة بالحرف C وتقاس بالفاراد عندما تكون الشحنة بالكولوم والجهد بالفولت

$$\therefore C = \frac{Q}{\Phi} = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})^{-1} \quad --- (41)$$

هنا يجب أن نؤكد على ان سعة المتسعة تعتمد على الشكل الهندسي للمتسعة وعلى ابعاد المتسعة. فاذا كانت شدة المجال الكهربائي بين لوحي المتسعة E وكثافة الشحنة السطحية σ فأن:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad --- 42$$

حيث أن: ϵ تمثل سماحية المادة العازلة بين لوحي المتسعة.

وبما أن:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = \sigma A \quad --- 43$$

$$E = \frac{\Phi}{d} \Rightarrow \Phi = dE \quad --- 44$$

حيث أن: d المسافة بين اللوحين
A المساحة السطحية للوح

$$\therefore C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\epsilon A}{d} \quad --- 45$$

أي أن سعة المتسعة تعتمد على شكل وأبعاد المتسعة كما أنها تعتمد على سماحية المادة الكائنة بين لوحيها ، ويمكن قياس سعة المتسعة إذا تم حساب الكميات ϵ و A و d .

كذلك /
يمكن حساب السماحية ϵ إذا عرفنا الكميات A و d و C .

كذلك يمكن حساب الطاقة المخزونة في المتسعة عندما يتم شحنها وذلك بالاستعانة بالعلاقة (34)

$$W = \frac{1}{2}\Phi_1 Q_1 + \frac{1}{2}\Phi_2 Q_2$$

$$W = \frac{1}{2}\Phi_1(+Q) + \frac{1}{2}\Phi_2(-Q)$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)Q$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\Phi Q \quad --- (46)$$

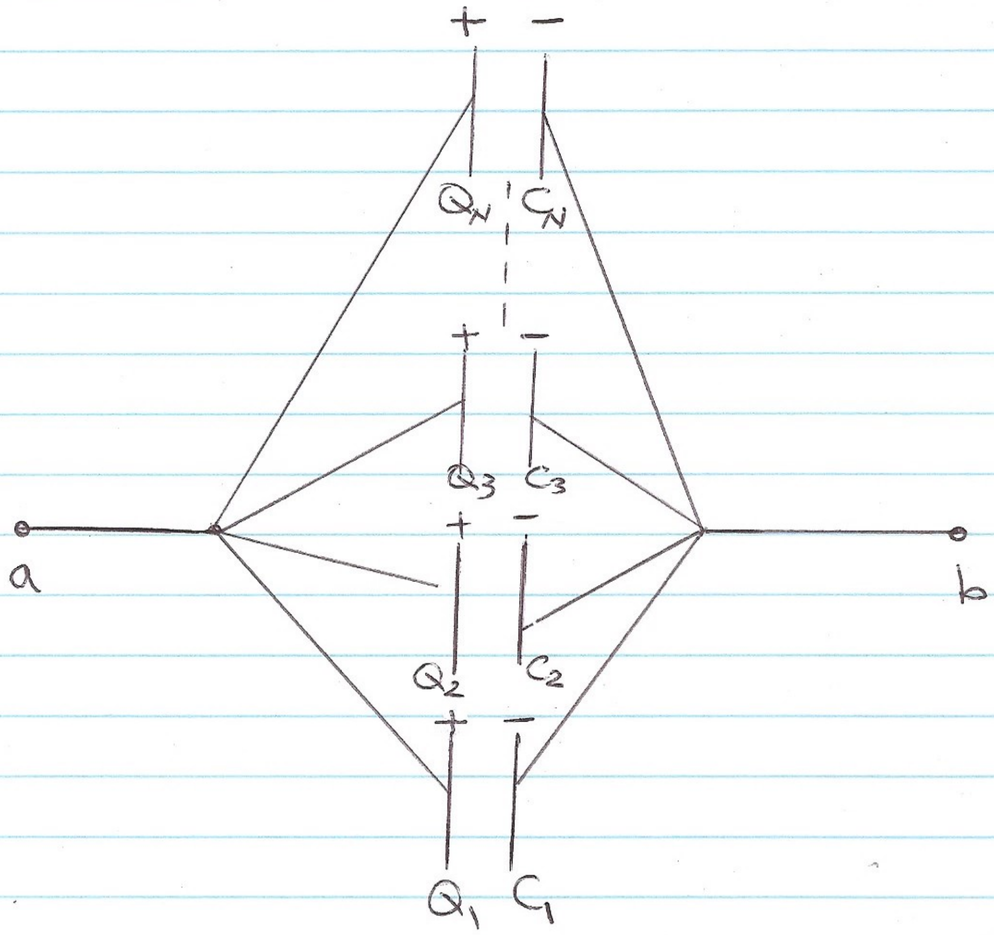
وبالاستفادة من العلاقة (41) يمكن أن نكتب :-

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\Phi^2 \quad --- 47$$

حيث أن ؛
$Q = C\Phi$
$\Phi = Q/C$

أحيانا تدعو الحاجة الى ربط عدة متسعات على التوازي للحصول على متسعة ذات سعة كبيرة.

فعندما نربط متسعات عددها N على التوازي كما في الشكل (6) حيث يكون فرق الجهد المتولد بين طرفي اي واحدة منها مساوي الى فرق الجهد بين طرفي المتسعة المكافئة.

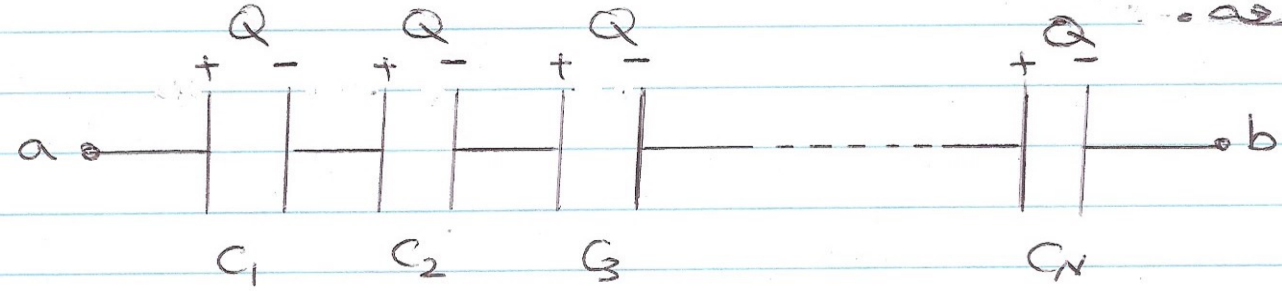


الشكل (6)

∴ السعة المكافئة تساوي:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i \qquad --(48)$$

كما يمكن ربط المتسعات على التوالي وكما هو مبين في الشكل (7). فاذا شحنت هذه المتسعات بالتعاقب فأن قانون حفظ الشحنة يتطلب ظهور نفس الشحنة على كل متسعة.



الشكل (7)

وعليه فأن السعة المكافئة يمكن أن يعبر عنها بالعلاقة التالية:

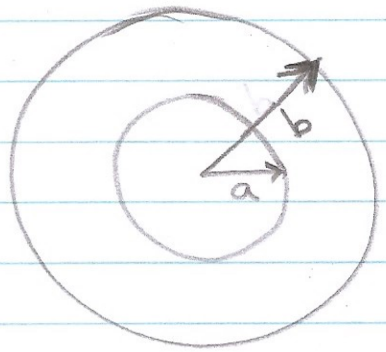
$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \qquad ---(49)$$

الجدير بالذكر أن السعة المكافئة C لهذا النوع من الربط (ربط التوالي) تكون أقل من أصغر سعة ضمن المجموعة بمعنى:

$$C < C_i \qquad i = 1,2,3,---N.$$

مثال :

أحسب معاملات السعة والحث لكرتين موصلتين متحدتي المركز نصف قطر الكرة الداخلية a والخارجية b .



الحل

نكتب أولاً المعادلتين

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 \end{aligned}\right\} \; **$$

أولاً عندما نضع شحنة مقدارها وحدة واحدة على الكرة الداخلية يصبح المجال الكهربائي بين الكرتين وكذلك المجال المحيط بالكرة الخارجية ناشئاً من شحنة كهربائية مقدارها وحدة واحدة واقعة في مركز الكرتين .

$$\therefore \underset{\text{الكرة } a}{Q_1} = 1 \quad , \quad \underset{\text{الكرة } b}{Q_2} = 0$$

$$1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2$$

$$0 = C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2$$

حيث أن $\Phi_1 = \frac{k}{a}$ و $\Phi_2 = \frac{k}{b}$

$\therefore$ إذن المعادلات تصبح :-

$$1 = C_{11}\frac{k}{a} + C_{12}\frac{k}{b} \qquad \text{----} \; 1*$$

$$0 = C_{21}\frac{k}{a} + C_{22}\frac{k}{b} \qquad \text{----} \; 2*$$

ثانياً عندما نضع شحنة مقدارها وحدة واحدة على الكرة الخارجية وتكون الكرة الداخلية غير مشحونة فإنه لا يكون هنالك مجال كهربائي في الداخل وعليه يكون

$$\phi_1 = \phi_2$$

بمعنى أن :

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{k}{b}$$

إذن المعادلات ** تصبح :

$$0 = C_{11}\frac{k}{b} + C_{12}\frac{k}{b} \qquad --- \quad 3*$$

$$1 = C_{21}\frac{k}{b} + C_{22}\frac{k}{b} \qquad --- \quad 4*$$

الآن نحل المعادلات *1 ⟵ *4 :-

من العلاقة *3

$$C_{11}\cancel{\frac{k}{b}} = -C_{12}\cancel{\frac{k}{b}}$$

$$\therefore C_{11} = -C_{12}$$

نعوض في العلاقة *1 نحصل :

$$1 = C_{11}\frac{k}{a} - C_{11}\frac{k}{b}$$

$$\therefore C_{11} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

$$\therefore C_{12} = -\frac{ab}{k(b-a)}$$

$$C_{21}\frac{\cancel{k}}{a} = -C_{22}\frac{\cancel{k}}{b}$$ من المعادله *2

$$\therefore \quad C_{21} = -C_{22}\frac{a}{b}$$

نعوض في العلاقة (4*):

$$1 = -C_{22}\frac{a}{b}\frac{k}{b} + C_{22}\frac{k}{b}$$

$$1 = C_{22}\left(\frac{k}{b} - \frac{ak}{b^2}\right) = C_{22}\left(\frac{kb-ak}{b^2}\right)$$

$$\therefore C_{22} = \frac{b^2}{k(b-a)}$$

$$\therefore C_{21} = -\frac{b^2}{k(b-a)}\cdot\frac{a}{b} = \frac{-ab}{k(b-a)}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} C_{11} &= \frac{ab}{k(b-a)} \\ C_{12} &= \frac{-ab}{k(b-a)} \\ C_{21} &= \frac{-ab}{k(b-a)} \\ C_{22} &= \frac{b^2}{k(b-a)} \end{aligned}} \quad \Longrightarrow C_{12} = C_{21}$$