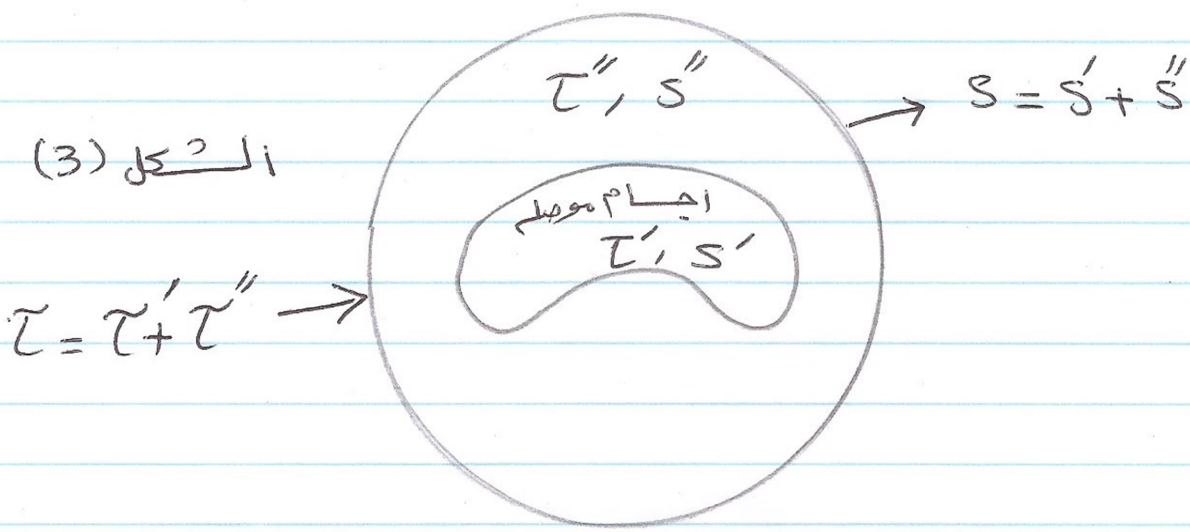
4.4 الطاقة الكامنة في حيز مشحون يحوي أجساماً موصلة

بالرجوع الى المعادلة (18) الخاصة بالطاقة الكهربائية الكامنة في حيز ما والتي تصح أيضاً في حالة وجود أجسام موصلة.
عندما تتواجد أجسام موصلة في هذا الحيز (وكما هو موضح في الشكل) فأن الشحنة التي كثافتها الحجمية $\rho(\vec{r})$ المنتشرة في الحيز تحث شحنة سطحية على أجسام تلك الموصلات. وكما أن هنالك شحنة حجمية محددة داخل الاوساط العازلة فأن هنالك شحنة تظهر على سطوح الاجسام الموصلة ترتبط ارتباطاً خطياً مع الشحنة الموزعة بكثافة حجمية $\rho(\vec{r})$.

ملاحظة: أن الاشتقاق الذي تم عرضه لغرض اشتقاق العلاقة (18) يصح أيضاً عندما تكون الأجسام الموجودة في الحيز أجسام موصلة دون أن تتغير طريقة الاشتقاق او النتيجة النهائية

الشكل (3)



اعتماداً على الشكل (3) علينا أن نكتب العلاقة (18) كالآتي:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho \phi \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{s'} \sigma \phi \, ds' \quad --- \; 26$$

حيث أن:

ρ هي كثافة الشحنة الحجمية تحت المنطقة المحيطة

σ هي كثافة الشحنة السطحية الحقيقية الموجودة على سطوح الأجسام الموصلة s' .

الآن نعوض عن $\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_{\tau} (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\phi \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{s'} \sigma \phi \, ds' \quad ---- \; 27$$

وبالاستفادة من المتطابقة التالية

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A} + \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

أو:

ملاحظة حول العلاقة

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\phi) = \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\phi$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\vec{D}\phi) = \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\phi) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\phi$$

$$\therefore (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{D}\phi) - \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

نعوض في العلاقة 27 نحصل على

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{\nabla}\cdot(\vec{D}\phi)\, d\tau - \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\phi)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{s'} \sigma\phi \, ds'$$

علينا تحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي

$$\therefore W=\frac{1}{2}\int_{S}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}+\frac{1}{2}\int_{S'}\sigma\phi\, ds'-\frac{1}{2}\int_{\tau}\vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\phi)\, d\tau \qquad ---28$$

السطح S يمثل السطح المحيط بالحجم τ

وعليه فإن $S''=S-S'$ يمثل السطح الذي يمثل الأجزاء غير الموصلة من السطح الكلي S كما هو واضح من الشكل (3) .

وعليه :

$$\int_{S}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_{S'}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}'+\int_{S''}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}'' \qquad ---29$$

الحد الأخير من الطرف الأيمن من العلاقة 29 يساوي صفر اذا اعتبرنا أن S'' هو جزء من سطح كرة واسعة جداً نصف قطرها يساوي r بذلك يكون

$$\therefore \int_{S}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_{S'}\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}'$$

وبما أن $d\vec{S}$ هو متجه عمودي على S رسم خارجاً من الحجم τ
$d\vec{S}'$ = = = S' = داخلاً الى = τ

فإن

$$\int_{s}\phi D_n ds=-\int_{S'}\phi D_n ds'=-\int_{S'}\phi\sigma ds'$$

حيث أننا استبدلنا D_n بالكثافة السطحية σ ، هذه النتيجة يمكن التوصل اليها بتطبيق الشروط الحدودية

الفاصلة بين الوسطين وبذلك فأن العلاقة (28) تصبح :

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\Phi)\, d\tau$$

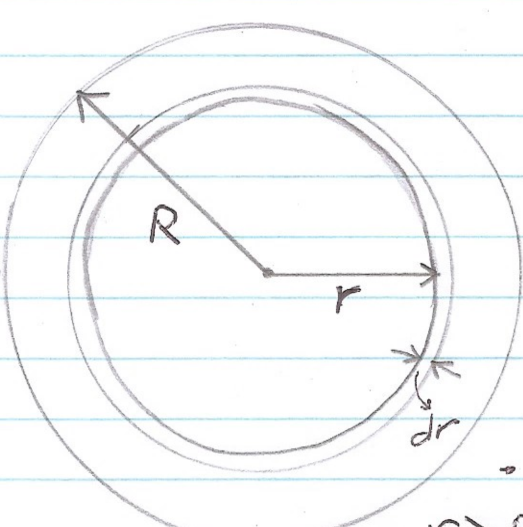
$$= \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\tau \qquad \text{و} \qquad \because \vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \epsilon E^2\, d\tau \quad --- \quad 30$$

ملاحظة :
هذا التكامل الحجمي في العلاقة 30 عليه أن يشمل الحيز بأجمعه وذلك لأن المجال الكهربائي $\vec{E}$ في هذه الحالة ينعدم داخل الأجسام الموصلة .

—

مثال (1)
أحسب الطاقة الكهربائية الكامنة لشحنة مقدارها Q موزعه بصوره متجانسه في حيز كروي نصف قطره R .



بما أن $W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \epsilon E^2 d\tau$

$$d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$r \sim 0 \longrightarrow \infty$$

اولاً نحسب E داخل الحيز على بعد $r<R$.
ثانياً نحسب E خارج الحيز على بعد $r>R$.

$$\int_s \vec{E} \cdot ds = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$ نطبق قانون كاوس

مقدار الشحنة Q' يساوي $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

حيث ρ هي الكثافة الحجمية

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ تمثل مقدار الشحنة ضمن الحجم الكروي الذي نصف قطره r.

مركبة المجال E باتجاه نصف القطر E'_r وأن $S = 4\pi r^2$

$$\therefore E'_r \, 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\therefore E'_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

الآن نطبق قانون كاوس

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q مقدار الشحنة ضمن الحجم الكروي الذي نصف قطره R

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\therefore E_r \, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \rho$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^R (E'_r)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty (E_r)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 4\pi \frac{\rho^2}{9\epsilon_0^2}\int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\rho^2 R^6}{9\epsilon_0^2} 4\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\int_0^R r^4 dr + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\frac{r^5}{5}\Big|_0^R + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0}\frac{r^{-2+1}}{-1}\Big|_R^\infty$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\frac{R^5}{5} - \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\Big|_R^\infty\right)$$

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} = 0 - \frac{1}{R}$$

$$= \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0 \, 5} + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$= \frac{2\pi\rho^2 R^5}{\cancel{9}_3\epsilon_0}\frac{\cancel{6}^2}{5} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

$$\therefore W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$