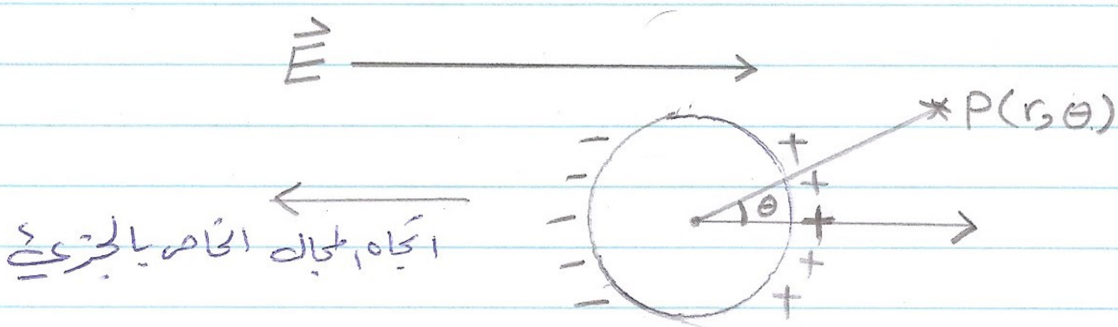
3-7 معادلة كلاوسيوس - موسوتي

في هذه الفقرة سوف نأخذ بنظر الاعتبار تأثير شدة المجال لجزيئة المادة العازلة في المجال الكهربائي الأصلي وهذا يعني أننا يجب أن نعرف معلومات تفصيلية عن شكل الجزيئة كموضعه وتأثير توزيع الشحنة فيها.

سوف نعتبر شكل الجزيئة ابسط شكل وهو الشكل الكروي



الشكل (6)

أن سبب وجود المجال الكهربائي لهذا الجزيء هو الشحنات المحتثة المقيدة الموجودة على نهايتي الجزيء والتي تساوي المركبة العمودية للاستقطاب اما اتجاه هذا المجال فتكون معاكساً لاتجاه الاستقطاب وهو يعاكس المجال الأصلي

إذن يمكن أن نكتب

$$\sigma_p = P_n = P\cos\theta \qquad ---(26)$$

وكان شدة المجال المتولد من هذه الشحنات المحتثة على سطح الكرة لمساحة صغيرة مقدارها ds هو $d\vec{E}_s$:

$$d\vec{E}_s = \frac{\sigma_p\, ds}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\vec{e}_r \qquad ---(27)$$

حيث أن $\vec{e}_r$ هو وحدة المتجه من السطح باتجاه مركز الكرة.

نعوض العلاقة (26) في (27) نحصل على

$$d\vec{E}_s = \frac{P\cos\theta\,\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^3}\, ds \qquad ---(28)$$

وباستخدام المحاور القطبية الكروية (r, θ, ϕ) يمكن أن نعوض عن ds بما يلي

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \qquad ---29$$

نعوض (29) في العلاقة (28) نحصل على

$$d\vec{E}_s = \frac{(-P\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \, ds \qquad ---30$$

* ملاحظة مهمة

$$d\vec{E}_s = \frac{-\vec{P}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\therefore \vec{E}_s = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

حيث أن r هو متجه من السطح الى مركز الكرة .

وبما أن $-\sin\theta \, d\theta = d(\cos\theta)$

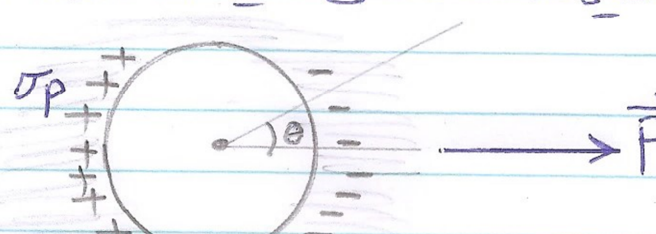
$$\therefore \vec{E}_s = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi$$

* ملاحظة مهمة : توضيح

بسبب التناظر ، تم التأكد أن مركبة $d\vec{E}_s$ الوحيدة فقط (والتي تقع على طول اتجاه $\vec{P}$) التي تساهم في قيمة التكامل في العلاقة (30).

نجد :

$$-\vec{e}_r P = \vec{P} r \cos\theta$$



$$\therefore \vec{E}_s = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\pi} \left.\phi\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{3}\left(-1-1\right)\,2\pi$$

$$\therefore \vec{E}_s = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2}{3}\,2\pi = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad --- 31$$

أذن شدة المجال الكهربائي الجزيئي يساوي حاصل الجمع الاتجاهي للمجال الخارجي $\vec{E}$ و المجال الخاص بالاستقطاب الجزيئي .

$$\underbrace{\vec{E}_m}_{\text{المجال الجزيئي}} = \underbrace{\vec{E}}_{\text{المجال الخارجي}} + \underbrace{\vec{E}_s}_{\text{المجال الخاص بالاستقطاب الجزيئي}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad --- 32$$

لقد اتضح في الكثير من الحالات وبالأخص المواد العازلة المتماثلة الصفات عند تعريضها لمجال كهربائي أن الأزاحة الحاصلة بين الجزيئات وكذلك عزوم ثنائي القطب فيها تتناسب مع المجال الجزيئي :

$$\vec{P}_m = \alpha \vec{E}_m = \alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right) \quad --- 33$$

تمثل α الاستقطابية polarizability $= \dfrac{\text{عزم ثنائي القطب للجزيئة}}{\text{وحدة المجال المستقطب}}$

ونضرب طرفي العلاقة (33) بـ N نحصل على:

$$N\vec{p}_m = N\alpha \vec{E}_m = N\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right)$$

حيث N تمثل عدد الجزيئات لوحدة الحجم حيث أن:

$$\vec{P} = N\vec{p}_m \quad --- \ 34$$

$$\therefore \ \vec{P} = N\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right) \quad --- \ 34$$

وبما أن $\left[\vec{P} = (K_e-1)\epsilon_0\vec{E}\right]$ نعوض هذه العلاقة في المعادلة 34 نحصل على:

واجب/ تأكد من صحة العلاقة 35

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N}\,\frac{(K_e-1)}{(K_e+2)} \quad --- \ 35$$

العلاقة 35 تسمى معادلة كلاوسيوس موسوتي وهي تعطينا العلاقة بين الاستقطاب الجزيئي وثابت العزل وعدد الجزيئات لوحدة الحجم للمادة العازلة.

3-8 معادلة لانجفن

في السوائل من المواد القطبية نجد أن هنالك تأثيراً كبيراً للتصادم والاضطراب الحراري على الجزيئات حيث تمنعها من التراصف باتجاه المجال الكهربائي الجزيئي. وبالرغم من هذا التأثير فإن قسماً قليلاً من عزوم ثنائيات القطب تكون باتجاه المجال الكهربائي الجزيئي. وفيما يلي سوف نحسب هذا النوع من الاستقطاب.

لنتصور وحدة حجوم من هذا المائع القطبي الواقع تحت تأثير مجال كهربائي خارجي، وحدة الحجم هذه تحتوي على N من الجزيئات المستقطبة.

في حالة عدم وجود مجال كهربائي خارج فإن اتجاه عزوم ثنائي القطب تكون عشوائي، ولنفرض أن عدد ثنائيات القطب المحصورة بين الزاوية θ والزاوية $\theta+d\theta$ عن الاتجاه المقصود في أي لحظة مساوي الى dN.

وعليه تكون النسبة $\frac{dN}{N}$ مساوية الى النسبة بين الزاوية المجسمة التي تقابل الزاوية الخطية $d\theta$ والزاوية المجسمة 4π:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi} = \frac{\sin\theta \, d\theta}{2} \qquad ----(36)$$

solid angle $= 2\pi \sin\theta d\theta$

لقد وجد انه في حالة تعرض جزيئات المادة الى مجال كهربائي جزيئي $\vec{E}_m$ وهي في حالة توازن أحصائي فإن عدد الجزيئات التي تمتلك الطاقة الكامنة W يتناسب مع المعامل

$$e^{-W/kT}$$

علماً بأن * W تعتمد على اتجاه ثنائي القطب بالنسبة للمجال الكهربائي الجزيئي.

* K ثابت بولتزمن $K = 1.38 \times 10^{-23}$ J/kelvin

* T درجة الحرارة المطلقة بمقياس كلفن

وفي هذه الحالة فأن ثنائيات القطب التي تصنع محاورها زوايا تقع ضمن المدى θ و $\theta+d\theta$ مقاسة من أتجاه المجال الكهربائي الجزيئي تمتلك جميعاً طاقة كامنة مقدارها:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_m = -pE_m \cos\theta \quad ---(37)$$

∴ عدد ثنائيات القطب dN في وحدة الحجم $d\tau$ التي تقع ضمن مدى الزاوية من θ الى $\theta+d\theta$ هو:

$$dN = c\, e^{-W/KT} \sin\theta\, d\theta \quad ----(38)$$

$$= c\, e^{pE_m\cos\theta/KT} \sin\theta\, d\theta$$

$$\therefore dN = c\, e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \quad ---(39)$$

حيث أن $\mu = \dfrac{pE_m}{KT}$

نكامل طرفي العلاقة (38) نحصل على:

$$N = c\int_0^{\pi} e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \quad ---(40)$$

وبالاستفادة من العلاقات ( ) و ( ) نجد أن الجزيئات التي عزومها تقع في مدى الزاوية من θ الى $\theta+d\theta$ تمتلك عزم ثنائي قطب بأتجاه المجال الجزيئي:

$$dP = p\,dN\cos\theta = pc\, e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \cos\theta$$

وبما أن

$$\therefore c = \frac{N}{\int_0^{\pi} e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta} \quad ---(41)$$

$$\therefore dP = p\,dN\cos\theta = pN \frac{e^{\mu\cos\theta} \cos\theta \sin\theta}{\int_0^{\pi} e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta} \quad ---(42)$$

ولايجاد قيمة الاستقطاب P يجب أن نكامل البسط في العلاقة الأخيرة من $\theta=0$ الى $\theta=\pi$:

$$P = pN \frac{\int_0^{\pi} e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\mu\cos\theta} \sin\theta\, d\theta} \frac{-\mu}{-\mu} \frac{\mu}{\mu} \quad ---(43)$$

كل التكاملات نفرض أن $t=\mu\cos\theta$ وعليه فان

$$dt = -\mu \sin\theta\, d\theta$$

وبعد ضرب المعادلة (43) بـ $\frac{-\mu^2}{-\mu^2}$ نحصل على $\Longleftarrow$

$$P = pN \frac{1}{\mu} \frac{\int_{-\mu}^{+\mu} e^{t}\, t\, dt}{\int_{-\mu}^{+\mu} e^{t}\, dt}$$

اما حدود التكامل

عندما تكون $\theta=\pi$ فان $t=\mu\cos\pi$

$t=-\mu$

عندما تكون $\theta=0$ فان $t=\mu\cos 0$

$t=\mu$

حيث تم قلب حدود التكامل .

$$\therefore P = pN \frac{1}{\mu} \frac{\left(te^{t}-e^{t}\right)\Big|_{-\mu}^{+\mu}}{e^{t}\Big|_{-\mu}^{+\mu}}$$

$$\therefore P = pN\left[\coth\mu - \frac{1}{\mu}\right] \quad ---44$$

$$\therefore P = pN\left[\coth\frac{PE_m}{KT} - \frac{KT}{PE_m}\right] \quad ---45$$

هذه المعادلة تسمى معادلة لانجفن

مداخله :

وعند درجة حرارة الغرفة ; $T = ?$

فأن $kT = 4 \times 10^{-21}$ J

وأن القيمة الاعتيادية لعزم ثنائي القطب $p = 10^{-3}$ C.m

فأذا كانت قيمة المجال الكهربائي الجزيئي

$$E_m = 4 \times 10^{7} \text{ V/m}$$

فأن قيمة μ :

$$\mu = \frac{pE_m}{kT} = \underline{\qquad\qquad}$$

واجب/تأكد من الناتج

$$\therefore \mu = 10^{-2}$$

$\therefore$ قيمة μ ستكون صغيرة وعليه يمكن أن نعمل تمديد للدالة $\coth(\mu)$ والتي يمكن كتابتها بهيئة متسلسلة وكالآتي :

$$\coth(\mu) = \frac{(2+\mu^2+ - - - - -)}{2\mu(1+\frac{\mu^2}{6}+ - - - -)}$$

وبأهمال الحدود المتبقية لصغرها بالمقارنة مع الحدين الأولين نحصل على

$$\coth(\mu) \simeq \frac{2+\mu^2}{2\mu(1+\frac{\mu^2}{6})}$$

$$\therefore P \simeq pN\left[\frac{(2+\mu^2)}{2\mu(1+\frac{\mu^2}{6})} - \frac{1}{\mu}\right]$$

$$\simeq pN\left[\frac{1}{2\mu}(2+\mu^2)(1+\frac{\mu^2}{6})^{-1} - \frac{1}{\mu}\right]$$

ولأن قيمة μ صغيرة فأن

$$(1+\frac{\mu^2}{6})^{-1} \simeq (1-\frac{\mu^2}{6})$$

$$\therefore P = pN\left[\frac{1}{2\mu}\left(2+\mu^2-\frac{\mu^2}{3}-\frac{\mu^4}{6}\right)-\frac{1}{\mu}\right]$$

هنا الحد يهمل بالمقارنة مع بقية الحدود

$$\therefore P = pN\left[\cancel{\frac{1}{\mu}}+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{6}-\cancel{\frac{1}{\mu}}\right]$$

$$P = pN\,\frac{2\mu}{6} = \frac{pN\mu}{3}$$

وبالتعويض عن قيمة μ نحصل على

$$\therefore P = \frac{Np^2}{3kT}E_m \qquad ---- \quad 46$$

المعادله (46) تمثل قانون كوري
هذه المعادله تؤكد أن الاستقطاب في المواد العازله القطبية يتناسب مع شدة المجال الكهربائي الجزيئي
