الفصل الثالث
المجال الكهربائي المستقر في المواد العازلة
Chapter Three
Electrostatic Field in Dielectric Media

بما أن هذا الفصل يخص المواد العازلة كان لابد من تقديم التمهيد الآتي.

3-1 تمهيد

* تختلف المواد العازلة عن المواد الموصلة في كونها لا تمتلك إلكترونات حرة الحركة تنساب داخل المادة تحت تأثير المجال الكهربائي وتحتوي على هذه المواد: الزجاج والمايكا والمواد البلاستيكية والورق والشمع .... الخ. أن المجال الكهربائي المسلط يؤثر في أيونات أو ذرات المواد العازلة التي هي عبارة عن شحنات سالبة وشحنات موجبة حيث يحدث إختلالاً في حالة توازن الشحنات السالبة بالإتجاه المعاكس مكونة ثنائي قطب كهربائي. وهذه الإزاحة تكون صغيرة جداً قياساً الى الأبعاد الذرية للمادة حيث انها لا تزيد عن ($10^{-5}A^{\circ}$ ($=10^{-6}nm$) ويقال للمادة في هذه الحالة بأنها استقطبت.

* هنالك مواد عازلة تحتوي على ثنائيات قطب دائمية بوضعها الاعتيادي وتكون إتجاهاتها عشوائية بحيث أن محصلة عزوم ثنائي القطب فيها تكون مساوية للصفر. وفي حال تعرضت الى مجال كهربائي خارجي فأن المجال الكهربائي يؤثر بعزم معين على ثنائيات القطب هذه ويحاول تدويرها بإتجاه المجال.
* وفي كلا الحالتين فأن عملية الإستقطاب تؤدي الى ظهور مجال كهربائي يكون إتجاهه معاكساً الى إتجاه المجال الخارجي المؤثر. ولقد وجد أن استقطاب المادة العازلة يعتمد على محصلة المجال الكهربائي التي تعتمد على المجال الكهربائي لثنائيات القطب التي تعتمد بدورها على طبيعة المادة.

3-2 النظرية المجهرية لاستقطاب المواد العازلة

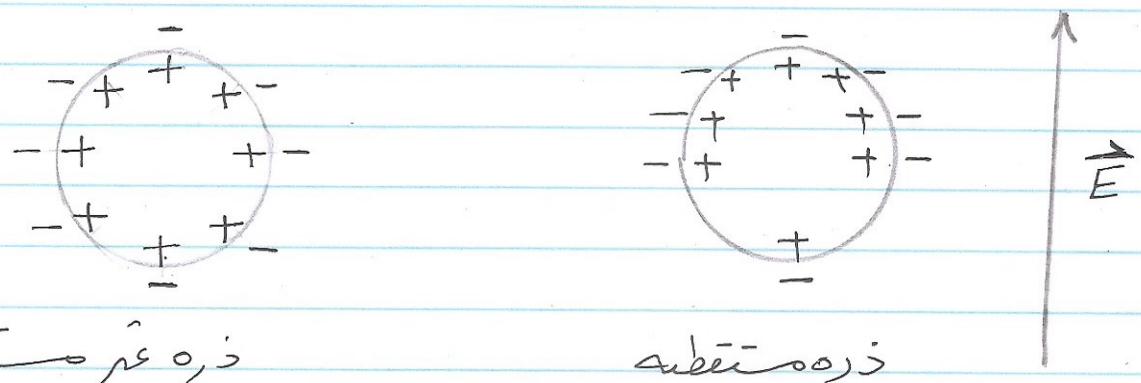
أنواع الاستقطاب

النوع الأول:

عندما تقع المواد العازلة تحت تأثير مجال كهربائي فإنها تستقطب. في حال عدم تعرض المواد العازلة الى مجال كهربائي فإنه ذرات المواد العازلة تتكون من شحنة موجبة في الوسط (النواة) يحيط بها سحابة من الالكترونات (ذات شحنة سالبة) وتكون مركز كتلة الشحنات السالبة منطبق تماماً على مركز كتلة الشحنات الموجبة وبذلك يكون عزم ثنائي القطب مساوياً الى الصفر.

أما اذا تعرضت المادة العازلة الى مجال كهربائي خارجي فإنه مركز الكتلة للشحنات الموجبة يزاح بإتجاه المجال والشحنات السالبة بالإتجاه المعاكس وتكون ثنائيات أقطاب. وينتج عن ذلك ان المادة العازلة سوف تمتلك عزم ثنائي قطب وتصبح مادة مستقطبة هذا النوع من الاستقطاب يسمى الاستقطاب الالكتروني electronic polarization أو المحث induced polarization.

الشكل (1) يوضح النوع الأول.

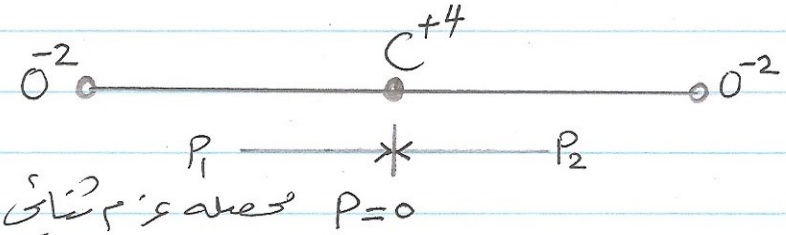


الشكل (1)

النوع الثاني

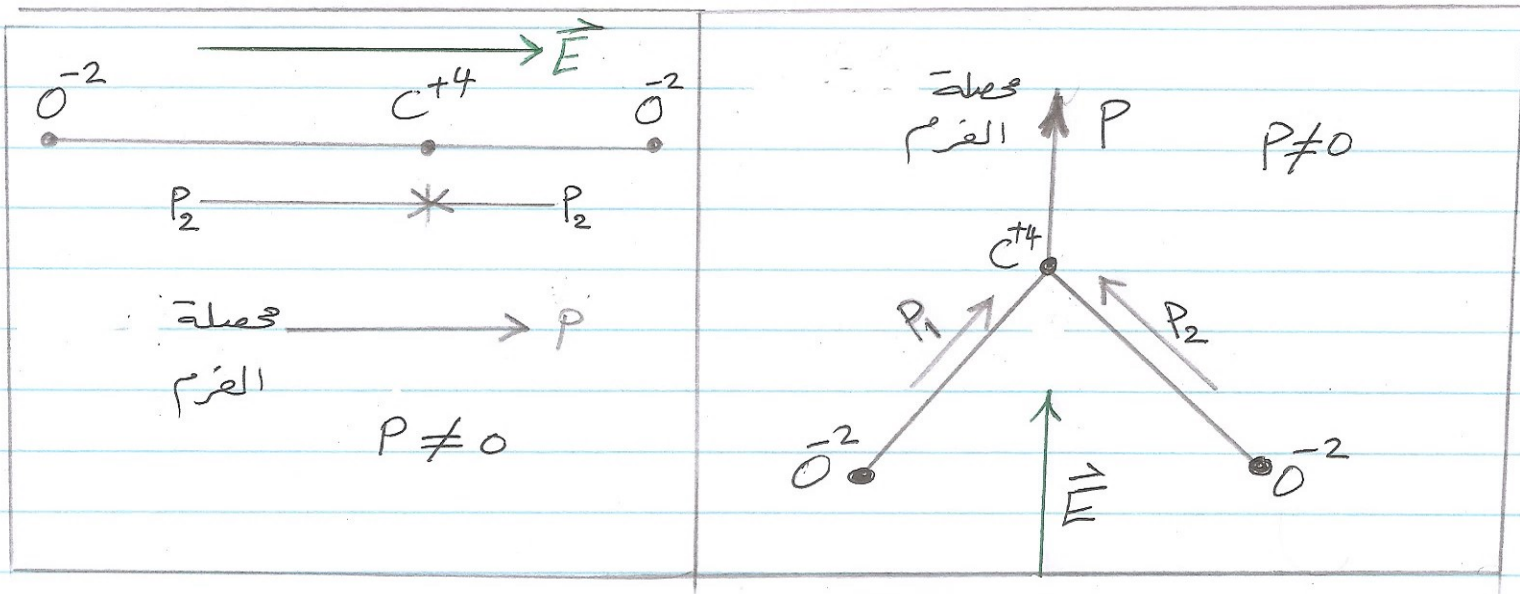
عندما تتعرض الجزيئات الى تأثير مجال كهربائي خارجي فأنها تستقطب ويسمى هذا النوع من الاستقطاب بالأستقطاب الأيوني ionic polarization ويعتمد ذلك على تأثر الايونات المكونه لهذا الجزيء.

مثال على ذلك جزيئات ثاني أوكسيد الكربون في حاله عدم تعرض الجزيئه الى مجال خارجي كما في الشكل (2a) حيث تكون محصله عزم ثنائي القطب تساوي صفر. في الشكل (2a) تكون ايونات الأوكسجين واقعه بشكل متناظر بالنسبه لأيون الكربون.



الشكل (2a)

أما اذا تعرض هذا الجزيء لتأثير مجال كهربائي خارجي فأن موقع أيونات الأوكسجين والكربون يتغير بالنسبه لبعضها البعض وتكون محصلة عزم ثنائي القطب ليست مساويه الى الصفر وتكون اتجاهها باتجاه شدة المجال الخارجي كما في الشكل (2b)



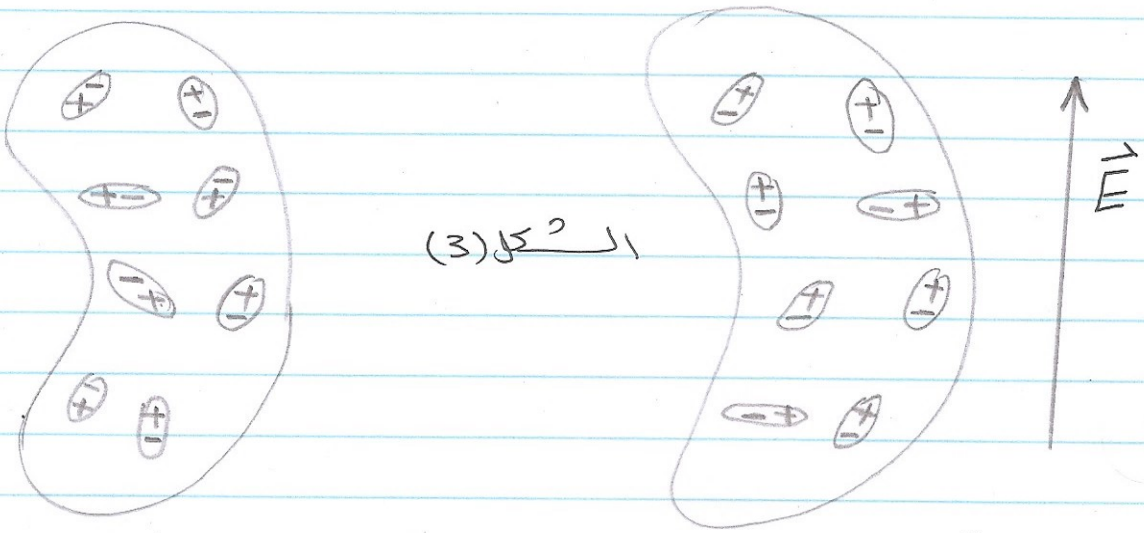
الشكل (3b)

النوع الثالث

اما النوع الثالث من الاستقطاب فهو النوع الخاص ببعض المواد التي تسمى المواد القطبية polar material حيث تمتلك جزيئاتها عزم ثنائي قطب دائمي حتى في حال عدم تعرضها الى مجال كهربائي خارجي ولكن محصلة هذه العزوم تكون مساوية للصفر .

في حاله وقوع هذه المواد تحت تأثير مجال كهربائي فأنه ثنائيات القطب فيها تتأثر بعزم يحاول تدويرها بأتجاه المجال وبهذا تكون محصلة عزوم ثنائي القطب لهذه الماده مساوياً للصفر كمثال لهذه المواد هو الماء .

ولكن الطاقة الحركية لجزيئات المادة (الطاقة الحرارية) تحاول دائماً أن تجعل عزم ثنائيات القطب موزعة بشكل عشوائي بالرغم من وجود المجال الكهربائي الخارجي لذلك فأنه الاستقطاب في هذه المواد يقيمه بصوره كبيره على درجه الحراره ويسمى هذا النوع من الاستقطاب بالاستقطاب التوجيهي orientational polarization



حالة وجود
مجال كهربائي خارجي مؤثر

الشكل (3)

حالة عدم وجود
مجال كهربائي خارجي

ملاحظه : في كثير من الحالات نجد أن الماده العازله تتصف بأكثر من حاله من حالات الاستقطاب الثلاث .

3-3 الأستقطاب

ماهو الأستقطاب ؟

عندما تتأثر المادة العازلة بالمجال الكهربائي الخارجي فأن ايونات هذه المادة تكون في حالة استقرار عندما تكون القوة المعيدة بين الشحنات المتخلفة مساوية للقوة التي يؤثر بها المجال الخارجي على هذه الشحنات.

فأذا كان $\vec{p}$ يمثل عزم ثنائي القطب للذرة الواحدة او الجزيئة الواحدة من المادة العازلة فأن الأستقطاب $\vec{P}$ يساوي محصلة عزوم ثنائيات الأقطاب في المتر المكعب من تلك المادة ويمكن كتابة الصيغة الرياضية كالآتي:

$$\vec{P} = N\vec{p} \qquad \text{---} (1)$$

واذا كانت المادة العازلة تحتوي على n من أنواع الذرات أو الجزيئات في تركيبها فأن عزم ثنائي القطب لكل نوع هو $\vec{p}_i$ وأن عدد الذرات أو الجزيئات في وحدة الحجوم هو N_i ، في هذه الحالة يمكن أن يأخذ الاستقطاب الصيغة التالية:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} N_i \vec{p} \qquad \text{---} (2)$$

ويمكن تعريف الاستقطاب كالآتي: اذا كان عزم ثنائي القطب في حيزما حجمه $d\tau$ هو $d\vec{p}$ فأن

$$\vec{P} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \qquad \text{---} 3$$

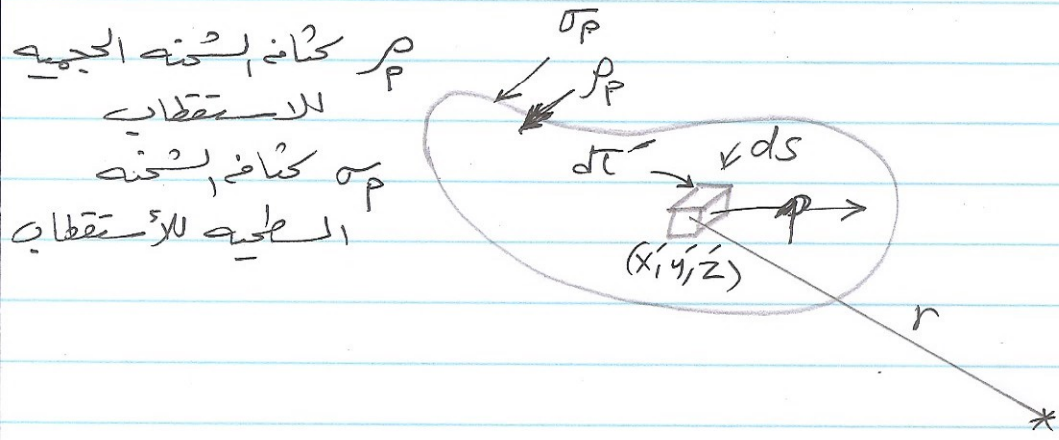
وعليه فأن الاستقطاب يتغير بتغير الموضع (الموقع) داخل المادة العازلة. الوحدة التي يقاس بها الاستقطاب هي $C.m^{-2}$ وهي كمية أتجاهية وأتجاهه هو أتجاه عزم ثنائي القطب.

3-4 شدة المجال الكهربائي في نقطة خارج المادة العازلة

نتصور حيزاً من مادة عازلة حجمها τ وكثافة الشحنة الحجمية فيها تساوي $\rho = 0$ وكثافة الشحنة السطحية على سطحها تساوي $\sigma = 0$.
عندما نوضع هذه المادة في مجال كهربائي خارجي $\vec{E}$ فإنه ذرات هذه المادة تستقطب وتكتسب عزماً ثنائي قطب وفي اي نقطة في هذا الحيز داخله أو خارجه سوف يستحدث جهداً جديداً بسبب عزوم ثنائيات القطب داخل المادة العازلة. وعليه فإن مقدار الجهد في هذه النقطة سوف يختلف عما كان عليه وضع المادة العازلة قبل تسليط المجال، كما أن شدة المجال سوف تتغير.
أن مقدار الجهد الكهربائي لثنائي قطب صغير في نقطة ما بعيدة عنه هي:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad \text{---} \ 4$$

ولكي نعمم العلاقة لتشمل جميع ثنائيات القطب في المادة العازلة المستقطبة
ولحساب شدة المجال في نقطة واقعة خارج المادة أو داخلها (x, y, z) كما موضح بالشكل (4).



الشكل (4)

الجهد عند النقطة (x, y, z) تساوي تكامل

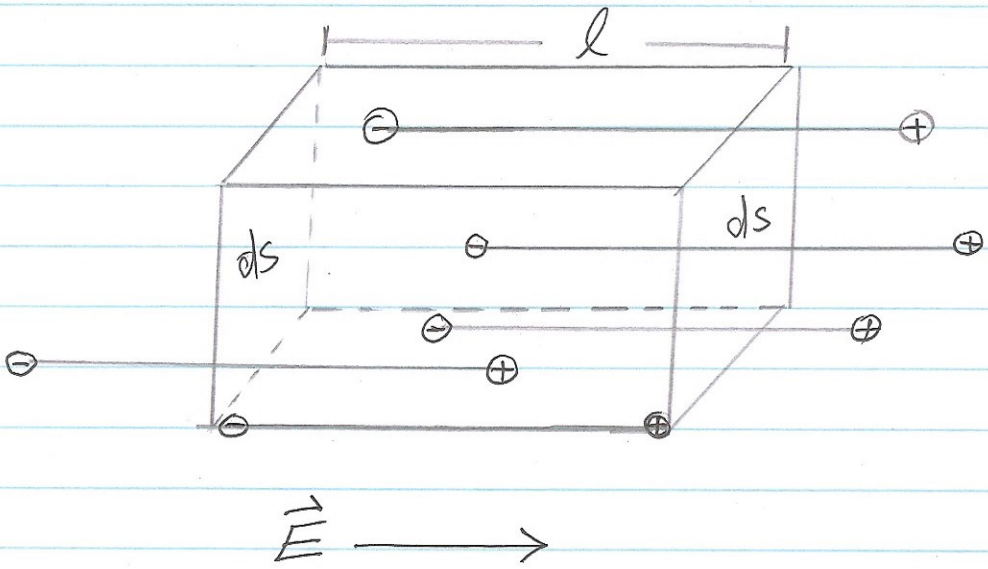
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{r^2} d\tau'$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{r} ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho_p}{r} d\tau' \quad \text{---(5)}$$

والتي سنأتي على ذكرها لاحقاً.

الآن لنتصور عنصر حجمي صغير في المادة العازلة مساحة سطحه الجانبي ds كما في الشكل ادناه (الشكل (5)) . وتأثير المجال الكهربائي تنفصل الشحنات الموجبة عن السالبة بأزاحة معدلها l حيث تندفع الشحنات الموجبة بأتجاه المجال لتقطع السطح ds الى اليمين اما الشحنات السالبة فتتحرك بالأتجاه المعاكس لتقطع السطح ds الى اليسار .

كمية الشحنة dQ التي تقطع السطح ds الى اليمين هي الشحنة الكلية في متوازي المستطيلات الموضح في الشكل ((5)) :



الشكل (5)

$$\vec{E} \longrightarrow$$

$$\therefore dQ = NQ\vec{l}\cdot d\vec{s} \quad \text{---} 6$$

Q هي شحنة نهايتي ثنائي القطب

N عدد الجزيئات في وحدة الحجوم

$$\therefore dQ = \vec{P}\cdot d\vec{s} \quad \text{---} 7$$ وعكن كتابة المعادلة (6) بالشكل الآتي :

على اعتبار أن عزم ثنائي القطب $\vec{P}$ يساوي $Q\vec{l}$ وأن الاستقطاب $\vec{P}$ يساوي $N\vec{P}$ ، ايضاً عكن كتابة المعادلة (7) كالآتي

$$dQ = \vec{P}\cdot\vec{n}ds \quad \text{---} 8 \qquad [d\vec{s} = \vec{n}ds]$$

حيث أن $\vec{n}$ هو وحدة المتجه العمودية على السطح ds .

أن كثافة الشحنة السطحية المحتثة على سطح المادة العازلة يمكن أن تحسب وفقاً للعلاقة الآتية

$$\sigma_p = \frac{dQ}{ds}$$

$$= \frac{\vec{P}\cdot\vec{n}\,ds}{ds} = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_n \quad \text{---(9)}$$

∴ كثافة الشحنة السطحية المحتثة على سطح المادة العازلة يساوي المركبة العمودية للاستقطاب على ذلك السطح.

∴ أن الشحنة الكلية التي تمر خلال السطح S الذي يحيط بالحجم τ تعطى بما يلي

$$Q = \int_S \vec{P}\cdot d\vec{s} \quad \text{--- 10}$$

ومعناه أن مقدار الشحنات الباقية داخل الحجم τ هو $-Q$ حيث أن المادة العازلة متعادلة الشحنات. فاذا أعتبرنا ρ_p هو كثافة الشحنات الحجمية داخل الحجم τ فأن

$$\int_\tau \rho_p\, d\tau = -Q \quad \text{---- 11}$$

∴ من المعادلتين (10) و (11)

$$\int_\tau \rho_p\, d\tau = -\int_S \vec{P}\cdot d\vec{s} \quad \text{---- 12}$$

وبأستخدام مبرهنة كاوس يمكن تحويل التكامل السطحي اى تكامل حجمي للطرف الأيمن في العلاقة (12)

$$\therefore \int_\tau \rho_p\, d\tau = -\int_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = -\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, d\tau \quad \text{--- 13}$$

وبمقارنة التكاملات الحجمية الواردة في العلاقة 13 نحصل على

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad \text{--- 14}$$

أذن كان شدة المجال داخل و خارج المادة العازله نستخدم العلاقه (5) حيث يتم تعويض

$$\sigma_p = P_n \quad ---(9)$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad ---(14)$$

في العلاقه (5) لايجاد $\phi(r)$ ثم يمكن حساب شدة المجال باستخدام العلاقه $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

توضيح :-

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{P_n}{r}\,ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\tau'} \frac{-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{r}\,d\tau' \quad ---(5)$$

علاقة مهمة

P_n ← المركبه العموديه للاستقطاب

$\vec{P}$ ← الاستقطاب وهي كميه اتجاهيه وحداتها كولوم/متر^2

r محدده بالشكل (4)

3-5 الإزاحة الكهربائية Electric displacement

باستعمال صيغة كاوس يمكن كتابة قانون كاوس بالشكل الآتي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} \quad \text{---} \quad (15)$$

تمثل ρ_t كثافة الشحنة لكل أنواع الشحنات مرة كانت تمام مقيده.
← يقصد بها كلمة total ⇐ الكلي

* عندما نطبق العلاقة (15) في الفراغ فإنه ρ_t تعني كثافة الشحنة في الفراغ ولكن عند استخدام العلاقة (15) في وسط عازل فلا بد من أن تأخذ بنظر الاعتبار كثافة الشحنة المقيده ρ_p (المعرفة في العلاقة (14)) والتي تنشأ بسبب استقطابية المادة العازلة.
* وعلى هذا الأساس فإن كثافة الشحنة في هذه الحالة تكون مجموع كثافة الشحنة الحرة وكثافة الشحنة المقيدة:

$$\rho_t = \rho_f + \rho_p$$

ρ_f ← كثافة الشحنة الحرة
ρ_p ← كثافة الشحنة المقيدة

∴ العلاقة (15) تصبح

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_p) \quad \text{----} \quad (16)$$

↓ تمثل شدة المجال داخل المادة العازلة

وبما أن

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_p)$$

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \nabla^2\phi = -\frac{\rho_t}{\epsilon_0} \quad \text{---} \quad (17)$$

← هذه المعادلة تمثل معادلة بوازان في المواد العازلة.

الآن نعوض (14) في العلاقة (16) نحصل على

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_f - \frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon_0\vec{E} = \rho_f - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

ملاحظة: ϵ_0 لا تعتمد على الأبعاد

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad \text{---- 18}$$

* هذه المقدار هو كمية أتجاهية
* يسمى متجه الازاحة الكهربائية
* وحداته هي نفس وحدات كثافة الشحنة السطحية كولوم/متر^2 (C/m^2)
* سوف نرمز لها بالرمز $\vec{D}$

$\therefore$ الازاحة الكهربائية:

$$\therefore \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \text{---- 19}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \quad \text{---- 20}$$

وبصورة عامة فإن قانون كاوس في المواد العازلة يمكن أن يكتب كالآتي:

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \rho_f \, d\tau \quad \text{---- 21}$$

المعادلة (20) تعني أن فيض الازاحة الكهربائية خلال سطح مغلق يساوي التكامل الحجمي الذي يحتوي ذلك السطح للكثافة الحجمية للشحنات الحرة في ذلك الحجم.

$\therefore$ اعتماداً على العلاقة (19) يمكن أن نكتب مايلي:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{---- 22}$$

شدة المجال الكهربائي داخل المادة العازلة

3-6 التأثرية الكهربائية وثابت العزل الكهربائي

The electric susceptibility and dielectric constant

العلاقة (22) توضح أن الاستقطاب $\vec{P}$ داخل المادة العازلة يعتمد على شدة المجال $\vec{E}$.

وعلى الرغم من أن هذه العلاقة هي ليست خطية للكثير من المواد وبالأخص عندما تكون شدة المجال الكهربائي عالية جداً حتى أنه لبعض المواد ذات التركيب البلوري يكون كل من الاستقطاب وشدة المجال متى أي اتجاهين متعاكسين ولكن بصورة عامة وفي الحالات التي لا تكون فيها المجال عالي يمكن أن نكتب مايلي

$\vec{P}$ و $\vec{E}$ وهي علاقة خطية بين

$$\vec{P} = \chi(\epsilon_0 \vec{E}) \quad \text{---- (23)}$$

χ ↓ معامل عددي يسمى التأثرية الكهربائية

نعوض المعادلة (23) في المعادلة (19) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1+\chi)\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore \vec{D} = K_e \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{---(24)} \quad \text{و} \quad \boxed{\begin{aligned} K_e &= 1+\chi \\ \chi &= K_e - 1 \end{aligned}}$$

K_e ↓ معامل عددي يمثل ثابت العزل

∴ العلاقة (23) يمكن أن تكتب كالآتي :

$$\vec{P} = (K_e - 1)\epsilon_0 \vec{E} \quad \text{---(25)}$$

كذلك المعادلة (24) يمكن أن تكتب كالآتي:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{--- 26}$$

$$\epsilon = K_e \epsilon_0 \quad \text{--- 27} \qquad \text{حيث أن}$$

المعامل ϵ يمثل سماحية المادة العازلة

وحدات المعامل ϵ هي نفس وحدات المعامل ϵ_0

وهي $\frac{C}{Vm} = \frac{\text{كولوم}}{\text{فولت} * \text{متر}}$

وتتراوح قيمة ثابت العزل بين الواحد والعشرة لمعظم المواد العازلة. $1 < K_e < 10$

* $K_e = 1$ للفراغ

* ويشذ الماء عن هذه القاعدة حيث أن ثابت العزل في درجات الحرارة الاعتيادية يساوي 80.