## ثالثاً: الدوال التوافقية للمحاور الأسطوانية $(r, \theta, Z)$

إذا كان شكل الجسم أو الشروط الحدودية تستوجب استعمال محاور اسطوانية فإن معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$ في المحاور الاسطوانية تعطى بما يلي:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Z^2} = 0 \quad \text{---}(79)$$

حيث أن $\nabla^2$ تعطى بالمحاور الأسطوانية بما يلي:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad \text{---} 80$$

الآن سوف نفرض أن الجهد والمجال الكهربائي يعتمدان فقط على $r$ و $\theta$ ولا يعتمدان على $Z$ وبذلك تكتب المعادلة (79) كالآتي:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $r^2$ نحصل على

$$\underbrace{r\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\phi}{\partial r}}_{\text{يعتمد هذا الحد على } r \text{ فقط}} + \underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}}_{\text{يعتمد هذا الحد على } \theta \text{ فقط}} = 0 \quad \text{---} 81$$

الآن علينا أن نستخدم اسلوب فصل المتغيرات وذلك بفرض أن:

$$\phi(r, \theta) = R(r)\, C(\theta) \quad \text{....} 82$$

نعوض $\phi(r,\theta)$ بالعلاقة (81) ثم تقسم طرفي العلاقة على حاصل الضرب $R(r)C(\theta)$ نحصل على:

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr} r \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{C(\theta)}\frac{d^2C(\theta)}{d\theta^2} = 0 \quad \text{...} 83$$

الحد الأول في المعادلة (83) يعتمد على r فقط والحد الثاني يعتمد على $\theta$ فقط ، إذن كل حد يكون مساوي إلى كمية ثابتة مثل $K'$ :

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}r\frac{dR(r)}{dr} &= K' \\ \frac{1}{C(\theta)}\frac{d^2C}{d\theta^2} &= -K' \end{aligned}\right\} \text{--- } 84$$

نفرض أن الحل $r^n$ يحقق المعادلة (84) المعتمدة على r نعوض هذا الحل بالمعادلة الأولى لكي نثبت أن $K' = n^2$

توضيح $\Rightarrow$
$$\frac{r}{r^n}\frac{d}{dr}r\frac{dr^n}{dr} = \frac{r}{r^n}\frac{d}{dr}r\,n\,r^{n-1}$$
$$= \frac{nr}{r^n}\frac{d}{dr}r^n$$
$$= \frac{nr}{r^n}n\,r^{n-1} = \frac{n^2}{r^{n-1}}\,r^{n-1}$$
$$= n^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}r\frac{dR(r)}{dr} &= n^2 \quad \text{---(a)} \\ \frac{1}{C(\theta)}\frac{d^2C(\theta)}{d\theta^2} &= -n^2 \quad \text{---(b)} \end{aligned}\right\} \text{---(85)}$$

أيضاً الحل $R(r)=r^{-n}$ يحقق المعادلة (85a) وكذلك الحلين $\sin(n\theta)$ و $\cos(n\theta)$ يحققان المعادلة (85b) .

$$R(r) \begin{cases} r^n \\ r^{-n} \end{cases}$$

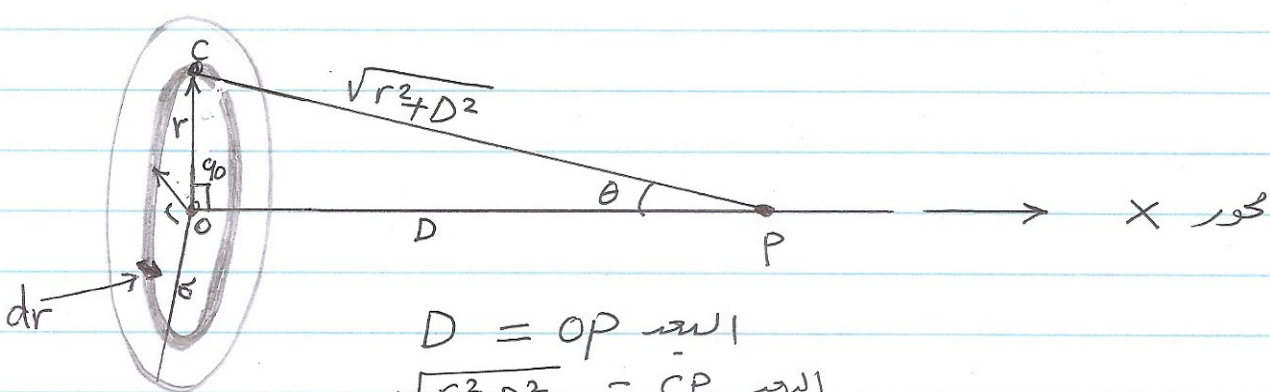
$$C(\theta) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}$$

∴ الحل الكلي لمعادلة لابلاس في المحاور الاسطوانية يكون بهيئة متسلسلة تضم لجميع قيم $n$ الموجبة $(n=1\longrightarrow\infty)$ (ولا تأخذ $n$ القيمة $n=0$).

$$\therefore \phi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{n}+B_n r^{-n}\right)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{n}+B_n r^{-n}\right)\sin(n\theta) \quad ---(86)$$

Example/2 مثال/2

جد شدة المجال في نقطة تقع على محور قرص صغير لسمك نصف قطره (a) مشحون بصورة منتظمة بشحنة كثافتها السطحية تساوي $\sigma$.




$D = OP$ البعد

$\sqrt{r^2+D^2} = CP$ البعد

$a =$ نصف القطر

* $dr$ عنصر البعد $r$
* سمك القرص صغير لذلك علينا اعتباره شريحة
* الشحنة موزعة على الشريحة بشكل منتظم بمعنى أن $\sigma$ مقدار ثابت لا يعتمد على $r$ و $\theta$.
* وحدات $\sigma$ هي $\frac{\text{وحدات شحنة}}{\text{وحدات مساحة}}$
* صورة الشريحة الدائرية المنتظمة بتوزيع الشحنة تكون صورة متناظرة بالنسبة للنقطة $P$ المراد ايجاد شدة المجال فيها.

* النقطة الأخيرة تعني أن مركبات شدة المجال $E_y=0$ و $E_z=0$ .

الآن يجب أن نكتب الصيغة الخاصة لـ $dq$

$$dq = 2\pi r \sigma dr$$

يمكن إيجاد شدة المجال في النقطة P باستخدام العلاقة:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi r\sigma dr}{(r^2+D^2)}\cos\theta \qquad \boxed{\cos\theta = \frac{D}{(r^2+D^2)^{1/2}}}$$

وبمكاملة الطرفين نجد

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\pi\sigma\int_0^a \frac{2rdr}{(r^2+D^2)}\frac{D}{(r^2+D^2)^{1/2}}$$

$$\therefore E_x = \frac{\pi\sigma D}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{2rdr}{(r^2+D^2)^{3/2}}$$

لحل التكامل نفرض $r^2+D^2=y^2 \Leftarrow \therefore 2ydy=2rdy$

$$\therefore E_x = \frac{\pi\sigma D}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{2y\,dy}{(y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma D}{4\epsilon_0}\int\frac{2y\,dy}{y^3}$$

$$E_x = \frac{\sigma D}{2\epsilon_0}\int\frac{dy}{y^2}$$

وبما أن $y^2=r^2+D^2$

$\therefore$ when $r=0$ $\quad \therefore y=D$

when $r=a$ $\quad y=\sqrt{a^2+D^2}$

∴ حدود التكامل تكون :

$$E_x = \frac{\sigma D}{2\epsilon_0} \int_{D}^{\sqrt{a^2+D^2}} y^{-2}\, dy$$

$$= \frac{\sigma D}{2\epsilon_0} \left. \frac{y^{-2+1}}{-1} \right|_{D}^{\sqrt{a^2+D^2}}$$

$$= \frac{-\sigma D}{2\epsilon_0} \left. \frac{1}{y} \right|_{D}^{\sqrt{a^2+D^2}} =$$

$$= \frac{-\sigma D}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2+D^2}} - \frac{1}{D} \right]$$

$$\therefore E_x = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{D}{\sqrt{a^2+D^2}} - 1 \right]$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{D}{\sqrt{a^2+D^2}} \right]$$

وفقاً للعلاقة الأخيرة يمكن القول أنه عندما يكون البعد $D=0$ اي عندما تكون النقطة $p$ قريبة جداً من النقطة $o$ (مركز الدائرة) فإنه :

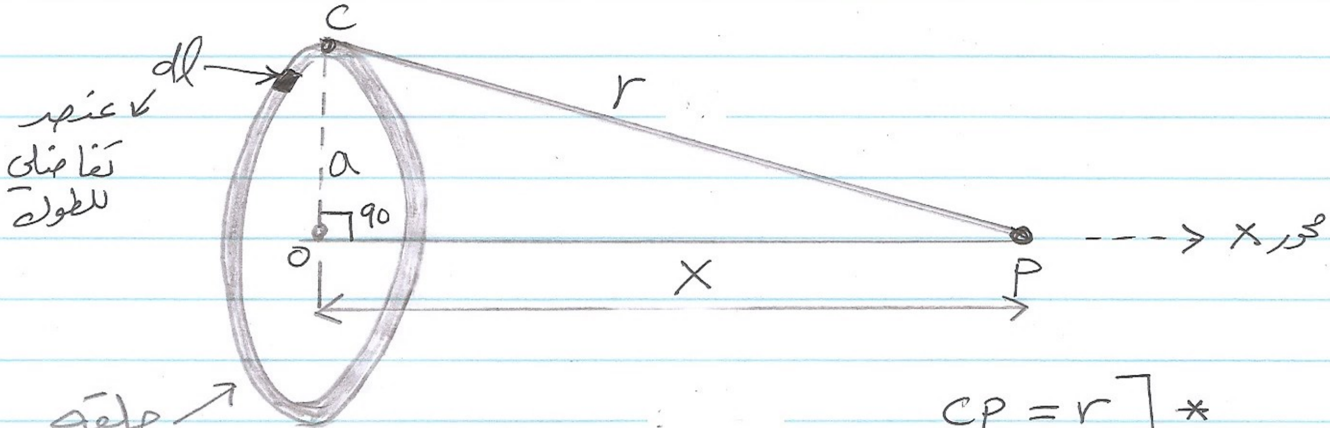
$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

واجب / اعد السؤال بأعتبار أن محور $x$ في الشكل هو محور $z$

واجب / اعد السؤال بأعتبار أن محور $x$ في الشكل هو محور $y$

Example 3 مثال 3

جد الجهد في نقطة تقع على محور حلقة نصف قطرها a مشحونة بشحنة منتظمة مقدارها q




$$\left.\begin{array}{l} CP = r \\ CO = a \\ OP = X \end{array}\right] *$$

$$\therefore r^2 = a^2 + x^2$$

* الشحنة منتظمة ⇐ يعني كثافة الشحنة منتظمة وهي تساوي $\sigma$

* وحدات $\sigma$؟ $\sigma = \dfrac{\text{وحدات شحنة}}{\text{وحدات طول}}$ وتعطى بالآتي $\sigma = \dfrac{q}{2\pi a}$

حيث أن $2\pi a$ تمثل محيط الحلقة $\therefore$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

حيث أن * $dq$ تمثل مقدار الشحنة على العنصر التفاضلي $dl$

$$\therefore dq = \sigma\, dl = \frac{q}{2\pi a}\, dl$$

$$\therefore \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{q\, dl}{2\pi a r}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2\pi a r}\int dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2\pi a r}\, l$$

$$\therefore \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2\pi a r}\, 2\pi a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a^2+x^2)^{1/2}}$$

ويمكن حساب شدة المجال بأستخدام العلاقة $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

وقبل حسابها يجب أن نتذكر أنه بصورة السحنة بالنسبة لنقطة $P$ تكون منتظمة لذلك فإن المركبات $E_y$ و $E_z$ كلاهما يساوي صفر ويبقى فقط المركبة $E_x$

$$\therefore \vec{E} = -\left(\vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\,\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial y}} + \vec{k}\,\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}}\right)$$

zero zero

لا تساوي صفر $\Rightarrow \therefore E_x = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-3/2}\ 2x$$

$$\therefore E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

واجب / اعتبر النقطة $P$ في الشكل على محور $y$ واعد حل السؤال.

واجب / اعتبر النقطة $P$ في الشكل على محور $Z$ واعد حل السؤال.

—

Example 4/ مثال 4

اذا علمت أن الجهد بتوزيع كروي معين لشحنة كهربائية يعطى بما يلي

$$\phi(r) = k\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

حيث أن كل من $\alpha$ و $k$ ثوابت . جد شدة المجال

ملاحظة : أستخدم : $E = -\frac{d\phi}{dr}$

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{d}{dr}\, k r^{-1} e^{-\alpha r}$$

$$= -k\left[r^{-1}e^{-\alpha r}(-\alpha) + (-1)r^{-2}e^{-\alpha r}\right]$$

$$= k\left[\frac{\alpha}{r}e^{-\alpha r} + \frac{1}{r^2}e^{-\alpha r}\right]$$

$$E = k\left(\frac{\alpha r + 1}{r^2}\right)e^{-\alpha r}$$

---

Example 5 // مثال // 5

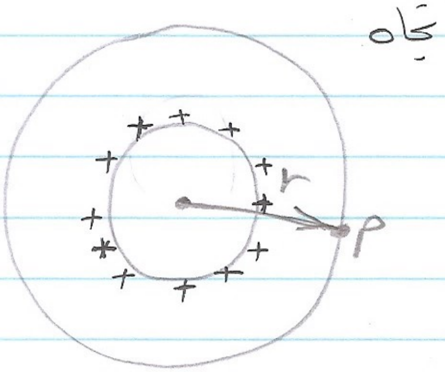
كرة مشحونة بشحنة مقدارها Q . استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال في اي نقطة خارج الكرة ثم استخدم العلاقة $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ لكي تجد العلاقة الخاصة بالجهد .

الحل

* السطح الكاوسي في هذه الحالة هو كرة وهمية نصف قطرها هو بعد النقطة P من مركز الكرة r كما في الشكل أدناه

* ومن التناظر الموجود في هذه المسألة يكون اتجاه المجال $\vec{E}$ عمودياً على السطح الكاوسي

ولذلك فأن $\cos\theta = 1$ * وأن الشحنة هي مجموع الشحنة الموجودة على الكرة وتساوي Q



قانون كاوس هو :

$$\int_S E\cos\theta \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\int_S E \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

وبما أن نقاط السطح الكاوسي تبعد بأبعاد متساوية من مركز الكرة لذلك فأن شدة المجال على هذا السطح تكون متساوية وكل منها يشير الى الخارج بأتجاه نصف القطر r .

$$\therefore E\int_S ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \text{و} \quad S = 4\pi r^2$$

S المساحة السطحية للكرة .

$$\therefore E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\because \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore \phi = -\int_\infty^r E\,dr = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^{-2+1}}{-1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_\infty^r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

حيث أن $\frac{1}{\infty} \Rightarrow zero$

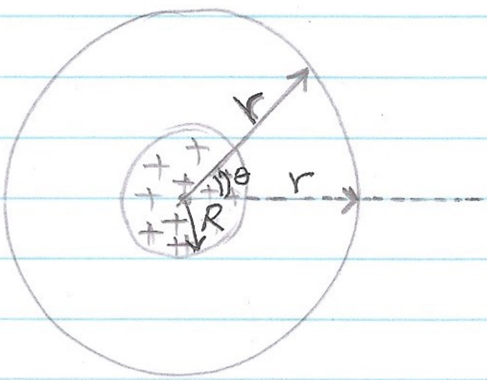
Example 6 مثال 6

جد شدة المجال لتوزيع حجمي لشحنة منتظمة على شكل كرة داخل وخارج هذا الحجم الكروي.

الحل

نتصور أن لدينا شحنة مقدارها $Q$ موزعة على حجم كروي نصف قطره $R$ حيث أن كثافة الشحنة الكهربائية في اي نقطة داخل هذا الحجم الكروي تساوي $\rho$

أولاً: في نقطة خارج الكرة $r > R$




$Q =$ الشحنة $= \rho *$ حجم الكرة

وحدات $\rho$ = $\dfrac{\text{وحدات شحنة}}{\text{وحدات حجم}}$

$$\therefore Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

الآن نطبق قانون كاوس

$$\int E\cos\theta \, ds = \int \frac{\rho \, d\tau}{\epsilon_0}$$

$d\tau$ يمثل العنصر التفاضلي للحجم الكروي

نأخذ الحالة التي يكون فيها $\theta = 0$ و $\cos\theta = 1$

$$\therefore \int E \, ds = \int \frac{\rho \, d\tau}{\epsilon_0}$$

$$E\int ds = \frac{\rho}{\epsilon_0}\int d\tau \Rightarrow ES = \frac{\rho \tau}{\epsilon_0}$$

المساحة السطحية للكرة $S = 4\pi r^2$ ; $\tau = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore E \, 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\rho 4\pi R^3}{4\pi r^2 3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

ثانياً: في نقطة داخل الكرة $r<R$
في هذه الحالة سوف نكتب الآتي:

$$\because Q = \frac{4}{3}\pi \rho R^3 \quad \text{——— } *$$

فإن الشحنة $Q'$ الفعالة داخل الكرة يمكن أن تكتب كالآتي

$$Q' = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \quad \text{- - - } **$$

حيث أن $r<R$
وبقسمة المعادلات $*$ و $**$ على بعضها نحصل
$\therefore$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{4\pi\rho r^3}{4\pi\rho R^3} = \frac{r^3}{R^3}$$

$$\therefore Q' = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

الآن نطبق قانون كاوس

$$\int E\cos ds = \int \frac{\rho d\tau}{\epsilon_0}$$

وبنفس طريقة الفرع الأول

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$\therefore E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

ملاحظة: * وفقاً للعلاقة الأخيرة فإن شدة المجال عند مركز الكرة تساوي صفر (لأن $r\to 0$)
* شدة المجال على السطح الخارجي للكرة (أي عندما $r=R$)
تساوي

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Example 7

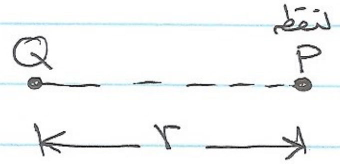
مثال (7)

أثبت أن جهد الشحنة النقطية (قانون كولوم) يحقق معادلة لابلاس .

الحل

أن جهد الشحنة النقطية في نقطة تبعد مسافة r عنها وفقاً لقانون كولوم يعطى بما يلي

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$




$$\nabla^2 \phi = 0$$ معادلة لابلاس تعطى بما يلي

$$\nabla^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = ??$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$$ لأن $\phi$ تعتمد على r فقط

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} r^{-1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 (-1) r^{-2}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} 1 = 0$$ لأن مشتقة الثابت تساوي صفر

---

مثال (8)

استخدم معادلة بوازان لأيجاد شدة المجال داخل جسم كروي فيه شحنات علماً بأن كثافة الشحنة الحجمية ثابتة وتساوي $\rho$ .

الحل

تعطى معادلة بوازان بما يلي

$$\nabla^2 \phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

وبما أن الحجم كروي والذي يعني أنه التغير يحصل فقط بإتجاه الاحداثي r

$$\therefore \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$$

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

$\rho$ = كثافة الشحنة الحجمية = $\frac{\text{وحدات شحنة}}{\text{وحدات حجم}}$

بضرب طرفي العلاقة بـ $r^2$ نحصل:

$$\therefore \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} r^2$$

الآن نضرب طرفي العلاقة بـ $dr$ .

$$d\cdot\left(r^2 \frac{d}{dr}\phi\right) = \frac{-\rho}{\epsilon_0} r^2\, dr$$

نكامل الطرفين

$$\int d\left(r^2 \frac{d}{dr}\phi\right) = \frac{-\rho}{\epsilon_0}\int r^2\, dr + C$$

$$r^2 \frac{d}{dr}\phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}\frac{r^3}{3} + C \; --- *$$

وبما أنه $\quad E_r = -\frac{d\phi}{dr}$

$\therefore$ علينا الاستفادة من العلاقة $*$ يجب أن نقسم الطرفين على $r^2$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{-\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3} + \frac{C}{r^2}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = -\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3} - \frac{C}{r^2}\right)$$

$$\therefore E_r = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3} - \frac{C}{r^2}$$

حيث أنه $C$ تمثل ثابت تكامل .

كيف تحدد قيمة C ؟
[أو ناقش النتيجة التي توصلت أليها]

عند مركز الكره يكون r = 0 نفوض في العلاقه التي حصلنا عليها :

$$E_r = \frac{\rho 0}{3\epsilon_0} - \frac{c}{0}$$

حيث أن $\frac{c}{0}$ هي كمية غير محددة وتساوي $\infty$ وهذه الكمية غير مقبولة فيزياوياً لانها غير محدده أذن C يجب أن تساوي صفر حتى يكون الحل مقبول فيزياوياً"

$$\therefore E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

ملاحظة : $\frac{\text{اي مقدار}}{\text{صفر}} = \infty$