/ أسئلة الفصل الأول

Q7 اذا كان S أي سطح مغلق وأن

$$\vec{A} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

فأثبت أن:

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = 3\tau$$

إذ أن τ يمثل الحجم المحاط بالسطح المغلق.

الحل:

بالاستفاده من مبرهنة كاوس

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

اولاً نجد قيمة $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1+1+1 = 3$$

$$\therefore \int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau 3\, d\tau = 3\int_\tau d\tau = 3\tau$$

$$\therefore \int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = 3\tau$$

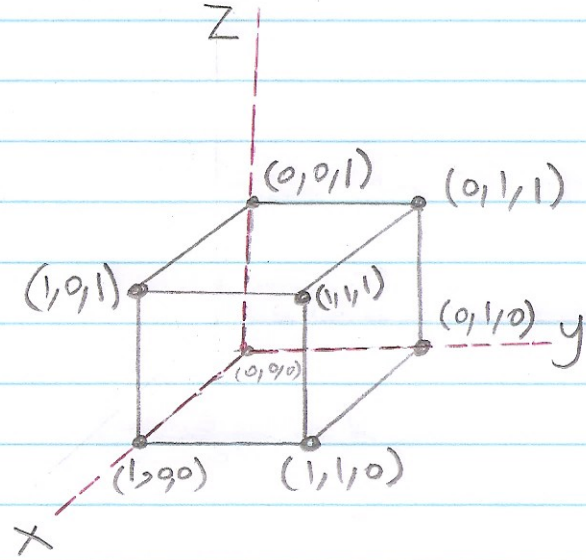
و.هـ.م

علماً بأن /

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$
$$\vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$$

Q12/ أختبر التكامل السطحي $\int_s \vec{A}\cdot d\vec{s}$ لمكعب أضلاعه موازية للمحاور الثلاثة المتعامدة وأحدى زواياه تقع عند نقطة الأصل وطول كل ضلع من أضلاعه يساوي وحدة واحدة علماً بأن $\vec{A}=\vec{i}\,x^2y$.

الحل :



$$\because \int_s \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d\tau \quad ----\ *$$

كذلك لدينا $\vec{A}=\vec{i}\,x^2y$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}\,x^2y\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}x^2y = y\frac{\partial}{\partial x}x^2 = y2x = 2xy$$

$$\therefore \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d\tau = \int_\tau 2xy\,d\tau$$

$$= \int_x\int_y\int_z 2xy\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_x x\,dx\int_y y\,dy\int_z dz$$

$$= 2\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right)\left(\int_0^1 dz\right)$$

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d\tau = 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)\left(z\Big|_0^1\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{0}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{0}{2}\right)(2-0)$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_s \vec{A}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}$$ و.هـ.م

واجب : اعد المثال السابق عندما ⇐ $\boxed{Q12}$

$$\vec{A} = \vec{i}\,x^2 y + \vec{k}\,z^2 y$$

Q29 حقق مبرهنة ستوك للمتجه $\vec{A}=\vec{j}x+\vec{k}y$ وللمربع الذي مساحته وحدة واحدة في المستوي (xy) ، احدى زواياه في نقطة الأصل وأضلاعه موازية للمحورين المتعامدين .

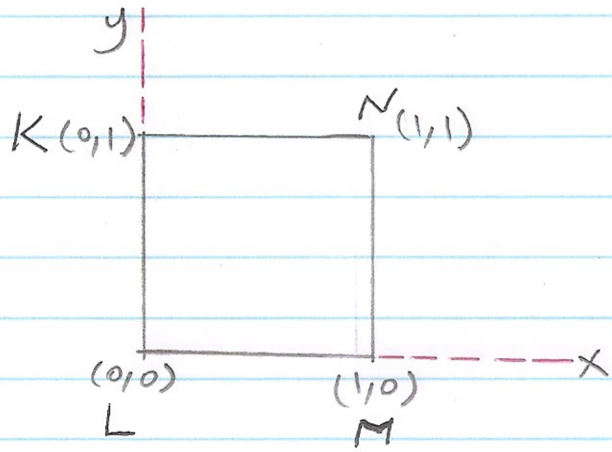
$\because \quad \vec{A}=\vec{j}x+\vec{k}y$

اولاً نحدد المركبات :

$A_x=0 \quad , A_y=x \quad , A_z=y$

تعطى مبرهنة ستوك بما يلي:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$$



نبدأ اولاً فنجد الطرف الايسر : الطرف الايسر $= \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s}$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial z}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\vec{j}x+\vec{k}y)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right)$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\because\ d\vec{s} = \vec{i}\,ds_x + \vec{j}\,ds_y + \vec{k}\,ds_z$$

وبما أن المسار يقع في الربع الأول من المستوي xy

$$ds_x = 0\ ,\ ds_y = 0\ ,\ ds_z = dx\,dy$$

يعني أن $d\vec{s} = \vec{k}\,dx\,dy$ وهو عمودي على المستوي xy

$$\therefore \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{i}+\vec{k})\cdot\vec{k}\,dx\,dy$$

$$= \int_S dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy$$

$$= \left(x\Big|_0^1\right)\left(y\Big|_0^1\right) = 1$$

الآن نجد الطرف الأيمن في معادلة مبرهنة ستوك

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint (\vec{j}x + \vec{k}y)\cdot(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy) = \oint x\,dy$$

$$= \underset{L\to M}{\int x\,dy} + \underset{M\to N}{\int_0^1 x\,dy} + \underset{N\to K}{\int x\,dy} + \underset{K\to L}{\int_0^1 x\,dy}$$

$L\to M$: هذا الحد فيه y ثابته لذلك يساوي صفر

$N\to K$: هذا الحد فيه y ثابته لذلك يساوي صفر

$$\therefore \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 x\,dy + \int_1^0 x\,dy$$

التكامل من

$M \rightarrow N$

$x = 1$

$k \rightarrow L$

$x = 0$

$$\int_0^1 x\,dy = 1\int_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1$$

$$\int_1^0 x\,dy = 0\int_1^0 dy = 0$$

$$\therefore \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = 1 + 0 = 1$$

∴ مبرهنة ستوكس متحققة

$$\therefore \int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$$