أ.د. جمال

أمثلة الفصل الأول

Ex. 1

إذا فرضنا أن $\vec{A}$ دالة متجهة مستمرة (continous function) وكذلك مشتقاتها فأثبت أن :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

الحل :

ملاحظة : الدوال المستمرة ؟؟

من المعروف أن صيغة $\vec{\nabla}$ تعطى بما يلي

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

صيغة $\vec{A}$ العامة تعطى بما يلي

$$\vec{A}=\vec{i}\,A_x+\vec{j}\,A_y+\vec{k}\,A_z$$

الآن نجد الضرب المتجهي $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

القوس الأول في العلاقة اعلاه يمثل مركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باتجاه المحور x وهي خالية من الرمز x .

القوس الثاني يمثل مركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باتجاه المحور y وهي خالية من الرمز y .

القوس الثالث يمثل مركبة $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باتجاه المحور Z وهي خالية من الرمز Z .

الآن نجد الضرب العددي $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}$$
$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}$$

علماً أن $\vec{A}$ دالة مستمرة إذن تبديل التفاضلات الجزئية في العلاقة الأخيرة يكون صحيح يعني:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}$$

وعليه فإنه $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$

طريقة أخرى للحل:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow$ علينا أن نكتب بطريقة أخرى

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{A}$$

وبما أن الضرب المتجهي لمتجه $\vec{\nabla}$ مع $\vec{\nabla}$ يكون مساوي للصفر يعني $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}=0$

$$\therefore (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{A}=0$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

و.هـ.م

ملاحظة:
$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}=0$
$\vec{A}\times\vec{A}=0$
$\vec{B}\times\vec{B}=0$

Ex.2 جد قيمة التكامل الخطي $\int\vec{A}\cdot d\vec{l}$ بين النقطتين $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$ الواقعتين على المنحني الممثل بالعلاقة التالية

علماً أن $\vec{l}$ متجه موقع $\rightarrow$ $\vec{l}=\vec{i}\,t+\vec{j}\,t^2+\vec{k}\,t^3$

$$\vec{A}=\vec{i}\,xy-\vec{j}\,z^2+\vec{k}\,xyz$$

الحل:

$$\vec{l}=\vec{i}\,x+\vec{j}\,y+\vec{k}\,z$$

كذلك علينا أن نكتب:

$$d\vec{l}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$$

∴ بالمقارنة بين صيغة $\vec{l}$ المعطاة في السؤال والصيغة العامة
يمكن أن نكتب الآتي :

$$x = t \quad ، \quad y = t^2 \quad و \quad z = t^3$$

$$\therefore \; xy = t^3 = z \quad ، \quad y = x^2 \; , \; z = x^3$$

وهكذا مثلاً : $z^2 = t^6 = y^3$

$$\therefore \int_{\substack{(0,0,0)\\ x\;y\;z}}^{(1,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int \left(\vec{i}\,xy - \vec{j}\,z^2 + \vec{k}\,xyz\right)\cdot\left(\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz\right)$$

ضرب عددي

$$\therefore \; \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

حيث أن

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \underbrace{|\vec{i}|}_{1}\,\underbrace{|\vec{i}|}_{1}\,\underbrace{\cos\theta}_{1}$$

لأن الزاوية θ بين $\vec{i}$ ونفس المتجه $\vec{i}$ تساوي صفر
وأن $\cos 0 = 1$
وهكذا.

كذلك

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

وهكذا لأن الزاوية بين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ على سبيل المثال تساوي 90 وأن $\cos 90 = 0$

$$\therefore \int \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{0,0,0}^{1,1,1} \left(xy\,dx - z^2 dy + xyz\,dz\right)$$

الحد الأول $= xy\,dx = x\,x^2 dx = x^3 dx$

الحد الثاني $= z^2 dy = x^2 y^2 dy = y\,y^2 dy = y^3 dy$

الحد الثالث $= xyz\,dz = z\,z\,dz = z^2 dz$

وعليه

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int (x^3dx - y^3dy + z^2dz)$$

$$= \int_0^1 x^3dx - \int_0^1 y^3\,dy + \int_0^1 z^2dz$$

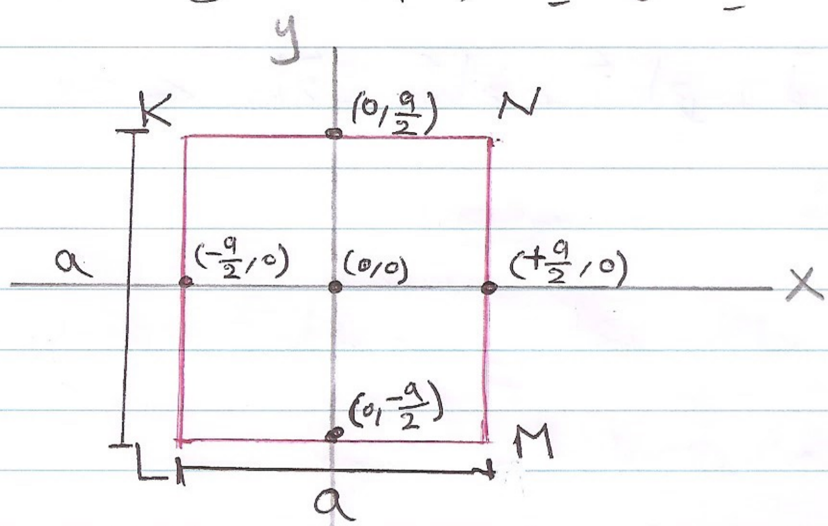
$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{z^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ex 3

اذا كان $\vec{A} = \vec{j}\,x + \vec{k}\,y$ ، حقق صحة مبرهنة ستوكس لمربع طول ضلعه a رسم في المستوي xy مركزه يقع في نقطة الأصل وأضلاعه بموازاة المحورين المتعامدين x و y .

الحل الخطوة الأولى في الحل هي رسم الشكل



$$\because \quad \vec{A} = \vec{j}\,x + \vec{k}\,y$$

$$\therefore \quad A_x = 0 \;,\quad A_y = x \;,\quad A_z = y$$

حتى نثبت مبرهنة ستوكس يجب أن نثبت الآتي

$$\underbrace{\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}}_{\text{تكامل سطحي}} = \underbrace{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}_{\text{التكامل على المسار المغلق}}$$

الآن نجد $\Rightarrow$
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{i}\left(\underset{1}{\frac{\partial y}{\partial y}} - \underset{\text{zero}}{\cancel{\frac{\partial x}{\partial z}}}\right) + \vec{j}\left(\underset{\text{zero}}{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}0}} - \underset{\text{zero}}{\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}}\right) + \vec{k}\left(\underset{1}{\frac{\partial x}{\partial x}} - \underset{\text{zero}}{\cancel{\frac{\partial 0}{\partial y}}}\right)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{i} + \vec{k}$$

كذلك لدينا $\Rightarrow$ $d\vec{s} = \vec{i}\,ds_x + \vec{j}\,ds_y + \vec{k}\,ds_z$

$\because$ المسار المغلق يقع على المستوى xy :

$$\therefore ds_x = 0 \;,\quad ds_y = 0 \;,\quad ds_z = dx\,dy$$

وهو عمودي على السطح xy

الآن نجد:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \int_s (\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{i}ds_x+\vec{j}ds_y+\vec{k}ds_z)$$

$$=\int_S (\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{k}\,dx\,dy)$$

وبما أن $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ و $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ كما وضحنا سابقاً

$$\therefore \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \int_S dx\,dy$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy$$

$$=\left[\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\left[\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]=a^2$$

ملاحظة حول الوحدات ؟

الآن نجد:

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint (\vec{j}x+y\vec{k})\cdot(\vec{i}dx+\vec{j}dy)$$

$$=\oint x\,dy$$

$$=\underbrace{\int_{-a/2}^{+a/2} x\,dy}_{L\to M}+\underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} x\,dy}_{M\to N}+\underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} x\,dy}_{N\to K}+\underbrace{\int_{+a/2}^{-a/2} x\,dy}_{K\to L}$$

* ملاحظة حول ترتيب الحروف (حسب الشكل) لأن المسار مغلق.
* التكامل على y في الحدود الأربعة.
* في المسار $L\to M$ ، y ثابت و x متغير لذلك الحد الأول = صفر
* = $N\to K$ = y ثابت و x متغير = الثالث = صفر

التكامل في المسار من $M \to N$ ، y متغير و x ثابت $x = \frac{a}{2}$

$$\therefore \frac{a}{2}\int_{-a/2}^{a/2} dy = \frac{a}{2}\left[\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right] = \frac{a^2}{2}$$

التكامل في المسار من $L \to K$ ، y متغير و x ثابت $x = -\frac{a}{2}$

$$-\frac{a}{2}\int_{a/2}^{-a/2} dy = -\frac{a}{2}\left[\frac{-a}{2}-\frac{a}{2}\right] = \left(-\frac{a}{2}\right)(-a) = \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = a^2$$

$$\therefore \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

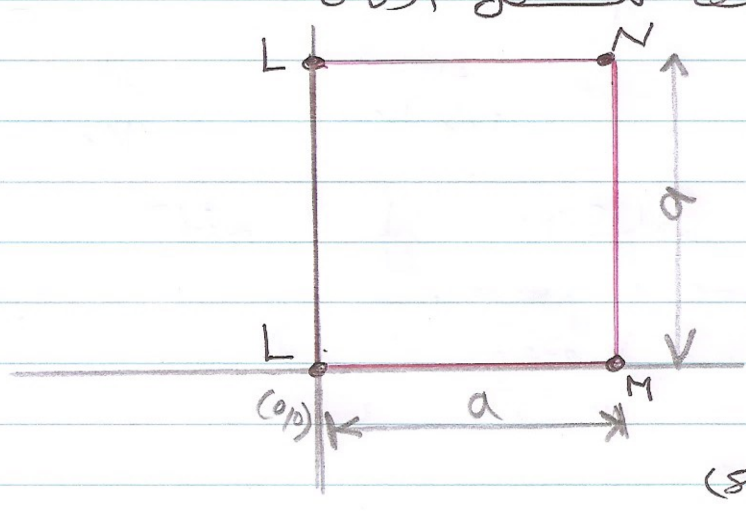
واجب H.W.

نفس نص المثال 3 ولكن

$$\vec{A} = \vec{j}x - \vec{k}y$$

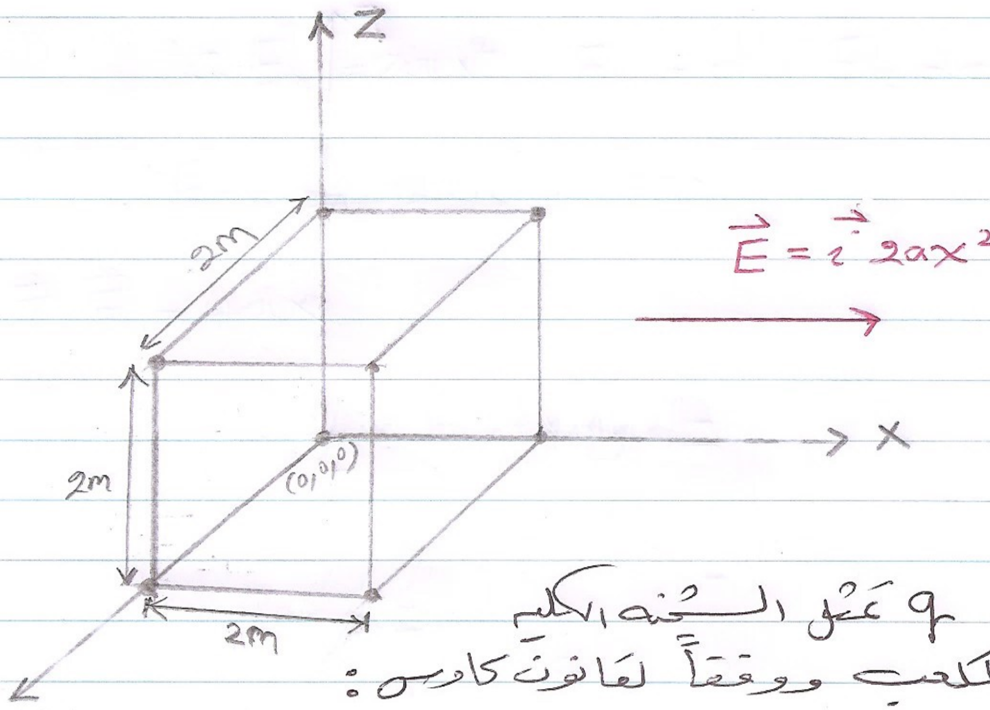
واجب H.W.

نفس نص المثال 3 ولكن مركز المربع لا يقع في نقطة الأصل وإنما وفقاً للشكل أدناه



Ex.4 : أستخدم مبرهنة كاوس لحساب الشحنة الكلية داخل مكعب طول ضلعه 2m إحدى زواياه تقع عند نقطة الأصل وأضلاعه موازية للمحاور المتعامدة x و y و z ، علماً بأن متجه المجال الكهربائي $\vec{E} = \vec{i}\,2ax^2$ وأن a كمية ثابتة

أول خطوة في الحل هو الرسم



نفرض أن q تمثل الشحنة الكلية داخل المكعب ووفقاً لقانون كاوس :

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ووفقاً لمبرهنة كاوس فأن

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

وعليه فأن :

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وعليه فأن الشحنة الكلية :

$$q = \epsilon_0 \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

ايجاد : $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)\cdot\left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \right)$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\because \vec{E} = \vec{i}\,2ax^2$$

$$\therefore E_x = 2ax^2 ,\ E_y = 0 ,\ E_z = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}2ax^2 = 4ax$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4ax$$

$$\therefore \int_{\tau} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = \int_{\tau} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_x\int_y\int_z 4ax\, dx\,dy\,dz$$

$$= 4a\int_0^2 x\,dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz$$

$$= 4a\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \right)\left(y\Big|_0^2 \right)\left(z\Big|_0^2 \right)$$

$$= 4a\left(\frac{4}{\cancel{2}} \right)(\cancel{2})(2)$$

$$= 32a$$

$$\therefore q = \epsilon_0\, 32a \Rightarrow 32a\epsilon_0$$

واجب : أعد حل المثال (4) بحيث تحقق العلاقة

$$\int_s \vec{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

لإيجاد التكامل السطحي $\int_s \vec{E} \cdot d\bar{s}$ على الأوجه الستة للمكعب .

واجب : أعد حل المثال (4) بعد أن تضع مركز المكعب على نقطة الأصل .

واجب : أعد حل المثال (4) بحيث

$$\vec{E} = \vec{j}\, 6y + \vec{k}\, 2z^2$$

Ex 5 أوجد وحدة المتجه العمودي على السطح $Z^2 = x^2 + y^2$ في النقطة $(1,-2,2)$.

الحل :

علينا الاستفادة من المعادلة $Z^2 = x^2 + y^2$ لكتابة دالة مثل Φ تكون دالة للمتغيرات x و y و Z :

$$\Phi(x,y,Z) = x^2 + y^2 - Z^2$$

الآن نجد $\vec{\nabla}\Phi$ حيث أن المتجه $\vec{\nabla}\Phi$ يمثل متجه عمودي على هذا السطح في أي نقطة من نقاطه

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\Phi + \vec{k}\frac{\partial}{\partial Z}\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Z} = -2Z$$

$$\therefore \vec{\nabla}\Phi = \vec{i}\,2x + \vec{j}\,2y - \vec{k}\,2Z$$

$\therefore$ المتجه $\vec{\nabla}\Phi$ العمودي على السطح في النقطة $(1,-2,4)$:

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{i}\,2 + \vec{j}\,2(-2) - \vec{k}\,2(2)$$

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{i}\,2 - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

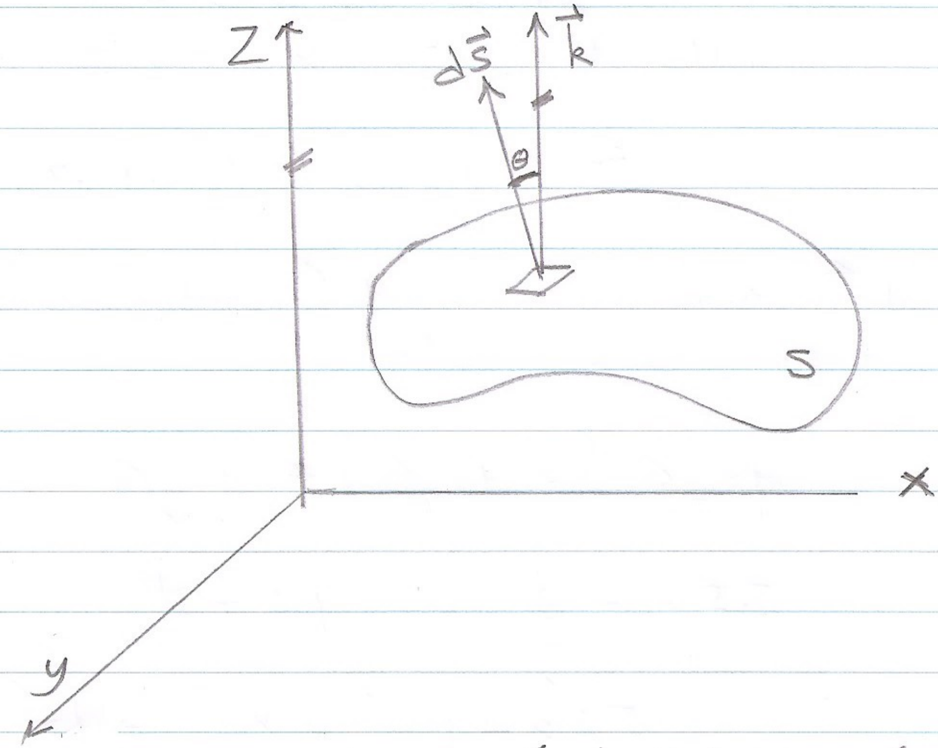
$$|\vec{\nabla}\Phi| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$\therefore$ وحدة المتجه العمودية :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}}{6} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

Ex 6 أحسب فيض المتجه $\vec{A} = \vec{i}\,2 - \vec{j}\,3x + \vec{k}\,y$ الخارج
من السطح المستوي $4x + 3y + 12z = 12$
الواقع في الربع الأول .



نفرض أن مسقط السطح يكون على المستوي xy
$d\vec{s}$ متجه العمودي على السطح وهنالك زاوية مقدارها
θ بين المتجه $d\vec{s}$ و المتجه $\vec{k}$.

المطلوب ايجاد الفيض

$$\text{الفيض} = \int_s \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

الآن نحدد $d\vec{s}$
بما أن هنالك زاوية بين $d\vec{s}$ و $\vec{k}$ وأن $d\vec{s}$ عمودي
على السطح ∴ وحدة المتجه $\vec{n}$ تكون باتجاه $d\vec{s}$
وأن الزاوية بين وحدة المتجه $\vec{n}$ ووحدة المتجه $\vec{k}$
تكون مساوية θ

$$\therefore\ d\vec{s} = \vec{n}\,\frac{dx\,dy}{\cos\theta}$$

معادلة السطح هي $4x + 3y + 12z = 12$

لأيجاد $\vec{n}$:

$$\therefore \phi(x,y,z) = 4x + 3y + 12z - 12$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = \vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 12$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\therefore |\vec{\nabla}\phi| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (12)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}}{13}$$

$$\therefore \vec{n} = \frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}$$

وبما أن $\vec{n}\cdot\vec{k} = |\vec{n}||\vec{k}|\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \vec{n}\cdot\vec{k} = \frac{1}{13}(4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k})\cdot\vec{k}$$

$$= \frac{12}{13}$$

$$\therefore \text{الفيض} = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,\frac{dx\,dy}{\cos\theta} = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,\frac{dx\,dy}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dx\,dy$$

$$= \frac{13}{12}\int_S (2\vec{i} - \vec{j}3x + \vec{k}y)\cdot\left(\frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}\right)dx\,dy$$

$$= \frac{1}{12}\int_S (2\vec{i} - \vec{j}3x + \vec{k}y)\cdot(4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k})\,dx\,dy = ?$$

واجب: أكمل الحل