الفصل الاول

المتجهات Vectors

(1-1) تمهيد

عند دراسة الظواهر المتعلقة بموضوع الكهرومغناطيسية من الضروري استخدام المتجهات .
أن الكميات الفيزيائية على نوعين :
الأول : الكميات العددية Scalars .
الكمية العددية هي الكمية التي تعين بشكل تام أذا عرف مقدارها فقط مثل الحرارة و الكتلة و الزمن والكثافة وغيرها من الكميات العددية .
الثاني : الكميات الأتجاهية او المتجهات Vectors .
الكمية المتجهة هي الكمية التي لا يمكن تعيينها بشكل تام ألا اذا عرف مقدارها والأتجاه الذي يؤثر فيه ، مثال على ذلك السرعة ، التعجيل و القوة وغيرها من الكميات الأتجاهية .

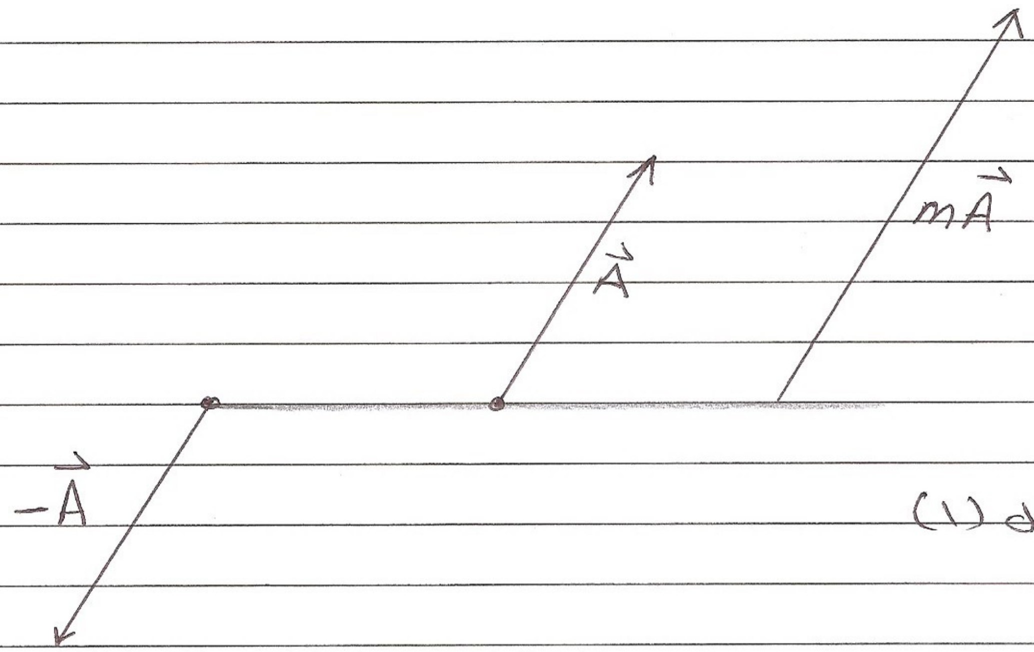
* ويمكن أن يمثل المتجه برسم سهم بين نقطتين أذ تدل المسافة بينهما على مقدار المتجه ويدل أتجاه السهم على أتجاه المتجه .

مثال الكمية A كمية عددية
و الكمية $\vec{A}$ كمية اتجاهية

(1-2) مقدار المتجه

فمثلاً لدينا المتجه $\vec{A}$ ، والرمز $|\vec{A}|$ يمثل قيمة او مقدار المتجه . أما $m\vec{A}$ فيمثل المتجه $\vec{A}$ مضروب بعدد هو m قد يكون سالب او موجب .

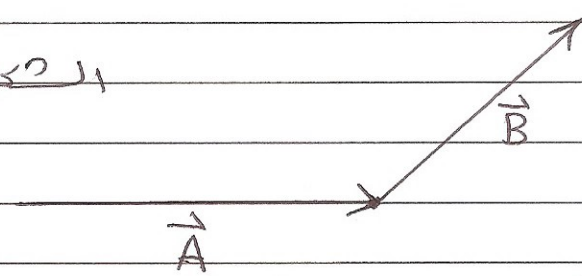
أما $-\vec{A}$ فيمثل المتجه $-\vec{A}$ الذي يعاكس $\vec{A}$ بالاتجاه.



الشكل (1)

(1-3) جمع وطرح المتجهات

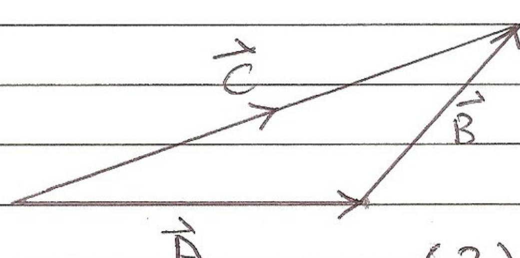
لايجاد حاصل جمع متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ، نرسم مايلي



الشكل (2)

ملاحظة:

اما حاصل جمعهما فيمثل بالمتجه $\vec{C}$
المتجه $\vec{C}$ يمثل المحصلة للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالمقدار والاتجاه.



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \quad ----(1)$$

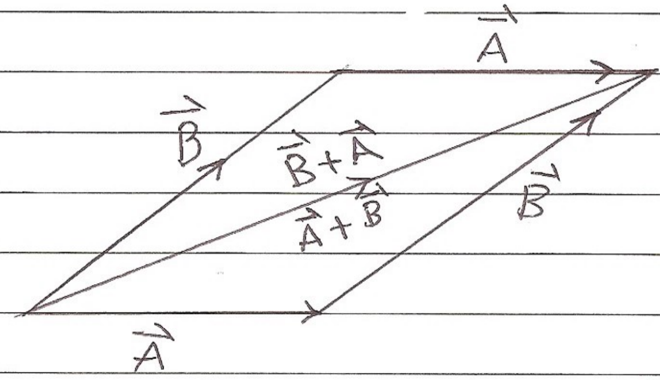
(2) الشكل (3)

كذلك لدينا الخاصية الآتية: خاصية التبادل

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \qquad ----(2)$$

وكما هي موضحة في الشكل الآتي: (الشكل (4))

ملاحظة
واضح من الشكل أن
حاصل الجمع يخضع
لقانون التبادل



(الشكل 4)

مثال آخر لثلاث متجهات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ الواقعة في مستوي واحد

أن حاصل جمع المتجهات يتم بطريقتين.

الأولى نجمع المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثم نضيف الى محصلتها المتجه $\vec{A}$

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

أو

$$(\vec{B}+\vec{C})+\vec{A}$$

اما الطريقة الثانية فنجمع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ثم نضيف الى المحصلة المتجه $\vec{C}$

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

أو

$$\vec{C}+(\vec{A}+\vec{B})$$

واجب: ارسم الأشكال على صفحة 9 من الكتاب المقرر

∴ المتجه النهائي لحاصل جمع المتجهات الثلاثة هو واحد بكلتا الطريقتين :

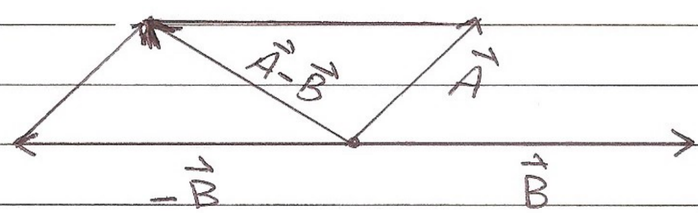
$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \qquad ---(3)$$

هذه الصفة او الخاصية تسمى Associative law

مثال : عملية الطرح : لدينا المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

عملية الطرح $\vec{A} - \vec{B}$

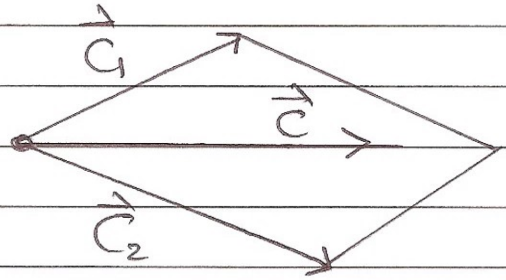
إذن يكون لدينا المتجه $\vec{A}$ والمتجه $-\vec{B}$ المضروب بالعدد (1-) . الشكل (5) أدناه يوضح عملية الطرح



الشكل (5)

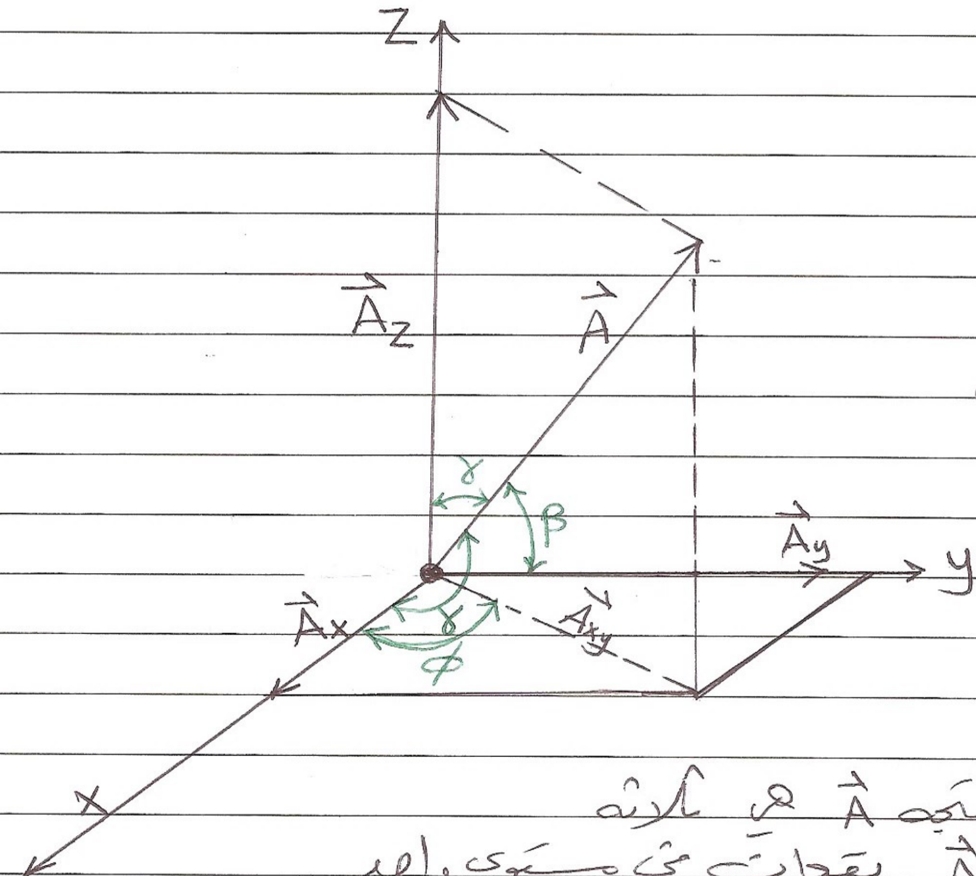
(4-1) تحليل المتجهات

تسمى العملية المعكوسة لجمع المتجهات بتحليل المتجهات . من الشكل المجاور (الشكل (6)) المتجه $\vec{C}$ وهو محصلة المتجهين $\vec{C_1}$ و $\vec{C_2}$



الشكل (6) : المتجهات $\vec{C}$ و $\vec{C_1}$ و $\vec{C_2}$ كلها تقع في مستوى واحد .

بعض الأحيان لا تقع المركبات جميعها في مستوى واحد ، لذلك يجب أن نستخدام المحاور الثلاثة المتعامدة X وY وZ . وكما هو موضح في الشكل (7)



الشكل (7)

مركبات المتجه $\vec{A}$ هي ثلاثة

$\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ تقعان في مستوى واحد

و $\vec{A}_z$ عمودي عليهما (يعني عمودي على المستوى الذي يضمهما)

$$\therefore \quad \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \qquad (4)$$

$$\text{أو} \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z$$

أن اتجاه اي متجه بالنسبة لاي محاور متعامدة يحدد بعد معرفة جيوب تمام الزوايا المحصورة بين المتجه وتلك المحاور وتسمى هذه بجيوب تمام اتجاه المتجه ويمكن أن تكتب كالآتي :

$$\cos(\vec{A}, x) = \cos\alpha = l$$

$$\cos(\vec{A}, y) = \cos\beta = m \qquad ---(5)$$

$$\cos(\vec{A}, Z) = \cos\gamma = n$$

أذ أن الزوايا α و β و γ هي الزوايا المرافقة للمحاور x و y و Z على التوالي .

يمكن تحليل $\vec{A}$ الى مركبتين $A_Z = A\cos\gamma$

و

$$A_{xy} = A\sin\gamma$$

المركبه $\vec{A}_{xy}$ يمكن تحليلها الى مركبتين الأولى بإتجاه x

$$A_x = A\sin\gamma\cos\phi$$

و

$$A_y = A\sin\gamma\sin\phi$$

أذن المركبات الثلاثه هي :

$$A_x = A\sin\gamma\cos\phi$$

$$A_y = A\sin\gamma\sin\phi \qquad ----(6)$$

$$A_Z = A\cos\gamma$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_Z^2} \qquad ---(7)$$

كذلك يمكن بالاستفادة من الشكل أن نكتب :

$$A=\sqrt{(A\cos\alpha)^2+(A\cos\beta)^2+(A\cos\gamma)^2}$$

$$A=\sqrt{(Al)^2+(Am)^2+(An)^2}$$

$$\therefore 1=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على

$$l^2+m^2+n^2=1 \quad \text{----}(8)$$

(5-1) وحدة المتجه Unit Vector

تعرف وحدة المتجه كالآتي

$$\vec{a}=\frac{\vec{A}}{A} \quad \text{----}(9)$$

$\vec{a}$ وحدة المتجه

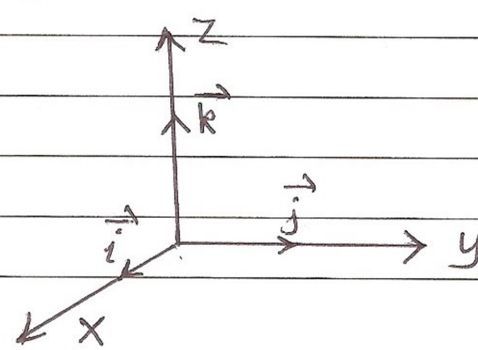
وهي كمية خالية من الوحدات كما يتضح من المعادلة (9).

وأن وحدة المتجه ترسم على خط تأثير المتجه $\vec{A}$.

بالنسبة للمحاور الديكارتية x و y و z المتعامدة فأن وحدات المتجه هي $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ على التوالي.

ملاحظة : قيمة وحدة المتجه تساوي واحد

$$|\vec{a}|=1 \quad (7)$$



إذن يمكن كتابة المتجه $\vec{A}$ كالآتي

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z \quad --- (10)$$

مثال: لدينا $\vec{A} = \vec{B}$

$$\therefore \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

ولكي تتحقق المساواة فأن المركبات المتناظرة يجب أن تكون متساوية.

$$A_x = B_x$$
$$A_y = B_y$$
$$A_z = B_z$$

(6-1) الضرب العددي لمتجهين Scalar Product

يعرف الضرب العددي لمتجهين كالآتي

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \quad --- (11)$$

حيث أن A تمثل مقدار المتجه $\vec{A}$.

B تمثل مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين

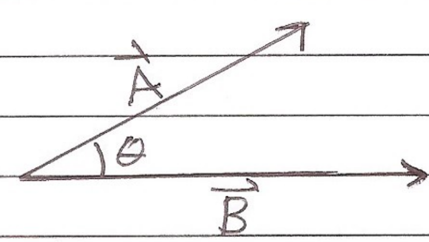
$\vec{A} \cdot \vec{B}$

← ضرب عددي

(dot product)

أو

(scalar product)



عندما تكون $\theta = 0$ فأن $\cos\theta = 1$ وبذلك $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

عندما تكون $\theta = 90$ فأن $\cos\theta = 0$ وبذلك $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

مثال :

جد حاصل الضرب العددي للمتجهات التالية

$$m\vec{A} \quad ، \quad n\vec{B}$$

الحل //

$$(m\vec{A})\cdot(n\vec{B}) = \underbrace{|m\vec{A}|}_{\text{قيمة المتجه الأول}}\,\underbrace{|n\vec{B}|}_{\text{قيمة المتجه الثاني}} \cos\theta$$

$$= mAnB\cos\theta$$

$$= mn\,\underbrace{AB\cos\theta}_{\vec{A}\cdot\vec{B}}$$

$$= mn\,\vec{A}\cdot\vec{B}$$

واجب اكمل الحل :

$$(n\vec{B})\cdot(m\vec{A}) = \;?$$

وبذلك يمكن أن نكتب الآتي

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad \text{------} (12)$$

ولإيجاد $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$ نستخدم خاصية التوزيع

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \quad \text{---} (13)$$

الآن نجد الضرب العددي لوحدات المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos\theta$$

$$\theta = 0$$

$$\because |\vec{i}| = 1$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i} = 1$$

وبنفس الطريقة

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

كذلك

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\cos\theta$$

$$\theta = 90$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{j} = 0$$

وبنفس الطريقة

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \quad \text{---} (14)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 1$$

مثال :

لدينا

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

فان الضرب العددي :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z)\cdot(\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)$$

واعتماداً على العلاقة (14) نحصل على

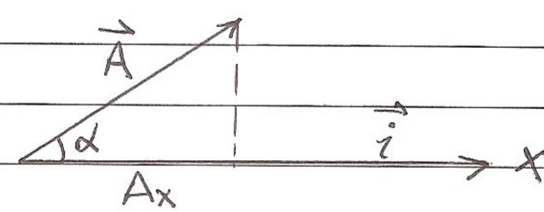
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad ---(15)$$

وعليه يمكن أن نكتب الآتي

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 \quad ----(16)$$

لنلاحظ الشكل الآتي :



$$\therefore \cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \qquad \therefore A_x = |\vec{A}|\cos\alpha$$

$$\therefore A_x = A\cos\alpha$$

الآن نجد :

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{i} = |\vec{A}||\vec{i}|\cos\alpha$$

$$\vec{A}\cdot\vec{i} = A\cos\alpha$$

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{i} = A_x$$

وبنفس الطريقة نجد

$$A_x = \vec{A} \cdot \vec{i}$$
$$A_y = \vec{A} \cdot \vec{j} \qquad ---(17)$$
$$A_z = \vec{A} \cdot \vec{k}$$

(7-1) الضرب المتجهي Cross Product

يعرف مقدار عزم قوة ما حول محور معين بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة العمودية من المحور على خط تأثير تلك القوة. وبما أن العزم (وهو كمية اتجاهية) ينتج من حاصل ضرب متجهين هما القوة والمسافة إذن لابد من البحث عن عملية ضرب مناسبة لحاصل الضرب كي يتم وصف العزم. هذا الضرب هو الضرب المتجهي.

الضرب المتجهي بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تكتب بالصيغة الآتية:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \qquad ---(18)$$

حاصل الضرب كمية اتجاهية

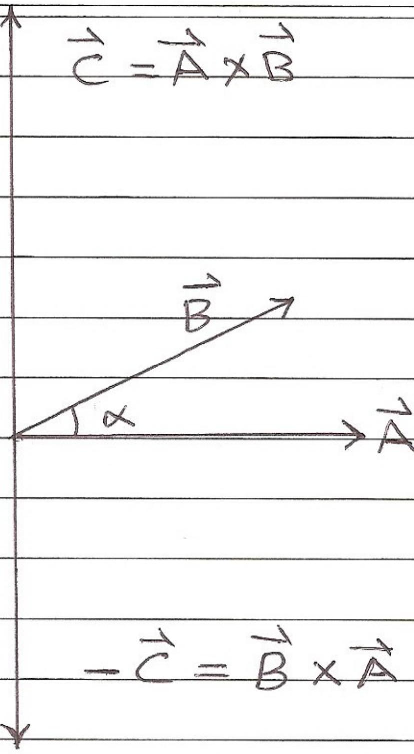
أما قيمة $\vec{C}$ المعطاة في العلاقة (18) فتعطى بما يلي:

$$|\vec{C}| = AB \sin \alpha \qquad ---(19)$$

حيث أن α هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

أما اتجاه $\vec{C}$ فيكون عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$

وهو عمودي على المستوى الذي يضم $\vec{A}$ و $\vec{B}$
ويحدد اتجاه $\vec{C}$ وفقاً لقاعدة اليد اليمنى، كما هو موضح بالشكل (8).



الشكل (8)

ملاحظ حول تطبيق
قاعدة اليد اليمنى

* أن حاصل الضرب المتجهي لا يخضع لقانون التبادل

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad ---(20)$$

* أن حاصل الضرب المتجهي يخضع لقانون التوزيع

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B} \quad ---(21)$$

* أن حاصل الضرب المتجهي للمتجهات الأساسية $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ يكون مساوية للصفر عندما يكون المتجهين متشابهين بحيث

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad ---(22)$$

توضيح : $|\vec{i} \times \vec{i}| = |\vec{i}|\,|\vec{i}| \sin 0 = 0$

اما اذا كانا متعامدين فانه فقيمة حاصل الضرب المتجهي يكون مساوية الى واحد :

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = 1 \quad \text{-----} \quad (23)$$

اما اتجاه $\vec{i} \times \vec{j}$ فيكون باتجاه المحور Z حسب قاعدة اليد اليمنى وعليه

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

وبنفس الطريقة

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\text{(24)} \text{ ---}$$

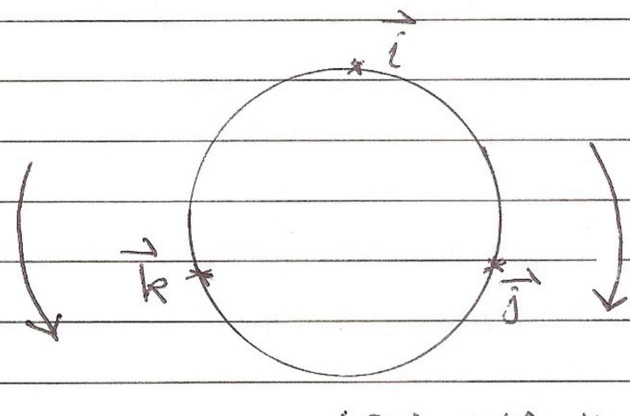
كذلك

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

ملاحظة حول تحديد الضرب المتجهي باستخدام الحلقة الموضحة بالشكل أدناه :



الشكل (٩)

ملاحظة : حول تحديد الحركة مع عقارب الساعة او عكس عقارب الساعة .

ويمكن كتابة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كالآتي

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$$

$$\vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z) \times (\vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z)$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = \; & \vec{i} (A_y B_z - A_z B_y) \\ & + \vec{j} (A_z B_x - A_x B_z) \qquad \text{---(25)} \\ & + \vec{k} (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

وهنالك طريقة سهلة يمكن أيضاً استخدامها لإيجاد $\vec{A} \times \vec{B}$ وذلك عن طريق كتابة المحدده الآتية:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{---(26)}$$

ملاحظة: حول طريقة إيجاد النتيجة المعطاة بالعلاقة 25 من المحدده الموضحة في العلاقة (26) .

8-1 الضرب الثلاثي العددي والمتجهي

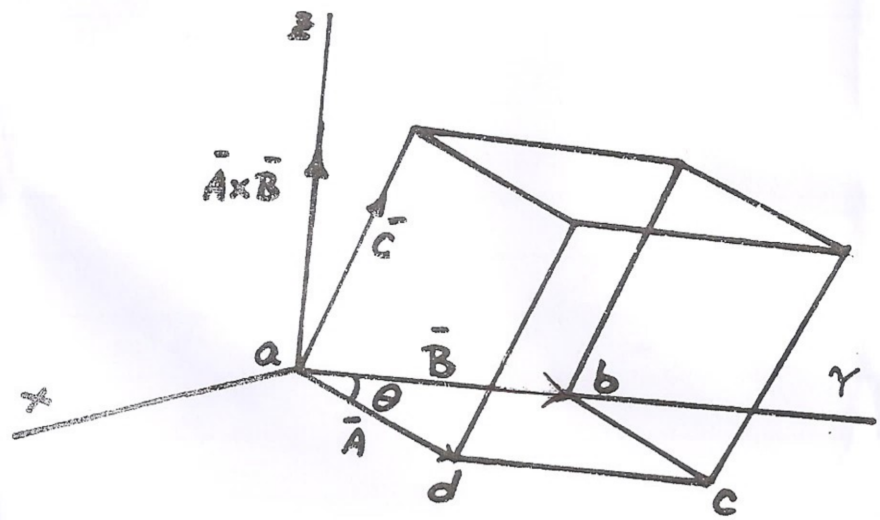
اولاً : الضرب الثلاثي العددي

أن عملية الضرب التي تحصل بين المتجهات الثلاثة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بالصيغة الآتية :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

تسمى الضرب الثلاثي العددي وهي كمية عددية .

الشكل التالي يوضح هذا الضرب : والذي يمثل التفسير الهندسي لحاصل الضرب



الشكل (10)

أي يمثل حاصل الضرب هذا حجم متوازي المستطيلات الموضح في الشكل (10)

$$\therefore\ V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \qquad ---(27)$$

لاحظ حول الأقواس ⟵

حيث أن حاصل الضرب $|\vec{A} \times \vec{B}|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع abcd أما اتجاه $\vec{A} \times \vec{B}$ فيكون باتجاه المحور z . لذا فإن الكمية $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ تنتج من ضرب المركبة C_z في مساحة متوازي الأضلاع abcd وبما أن المركبة C_z تمثل ارتفاع متوازي المستطيلات لذا فإنه حاصل الضرب $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ يمثل حجم متوازي المستطيلات .

إن التفسير الهندسي هذا يوصلنا الى النتيجة التالية :

$$V = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \qquad ---28$$

يلاحظ من المعادلة (28) . الترتيب الدوري للمتجهات الثلاثة يبقى ثابتاً في الحالات الثلاثة لحاصل الضرب وهو في كل حالة مساوي الى حجم متوازي المستطيلات المنوه عنه سابقاً .

ملاحظة :

$$
\begin{aligned}
V &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \\
&= -(\vec{B} \times \vec{A}) \cdot \vec{C} \quad \text{أيضاً تساوي} \qquad ---(29) \\
&= -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) \quad \text{أيضاً تساوي} \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})
\end{aligned}
$$

أن الضرب الثلاثي العددي لا تتغير قيمته إذا حصل تبادل موضعي بين علامتي الضرب العددي والمتجهي بمعنى أن :

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

ويمكن كتابة حاصل الضرب الثلاثي العددي على شكل محدده وكالآتي

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{---} 30$$

$$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y)$$
$$+ A_y(B_z C_x - B_x C_z) \quad \text{---} 31$$
$$+ A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

ثانياً:

الضرب الثلاثي المتجهي Triple Vector Product

أن عملية الضرب التي تحصل بين المتجهات الثلاثة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ وبالشكل ادناه تسمى بالضرب الثلاثي المتجهي وأن حاصل الضرب هو متجه ولنرمز له بالحرف Q :

$$\vec{Q} = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \quad \text{---} 32$$

ملاحظة

$$\vec{Q} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

المتجه $\vec{B}\times\vec{C}$ عمودي على كل من $\vec{B}$ و $\vec{C}$ لذلك هو عمودي على المستوي الذي يضمهما

المتجه $\vec{Q}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ و $(\vec{B}\times\vec{C})$ لذلك عمودي على المستوي الذي يضمهما

∴ من ذلك نستنتج أن المتجه $\vec{Q}$ يقع في المستوي الذي يضم المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{C}$.

علماً بأن :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C} \quad \text{.....(33)}$$

واجب H.W.

إذا كان

$$\vec{A} = \vec{i}\,A_x + \vec{j}\,A_y + \vec{k}\,A_z$$
$$\vec{B} = \vec{i}\,B_x + \vec{j}\,B_y + \vec{k}\,B_z$$
$$\vec{C} = \vec{i}\,C_x + \vec{j}\,C_y + \vec{k}\,C_z$$

أثبت العلاقة (33)