Function Range مدى الدالة

- لتكن $B \longrightarrow A:$ $\boldsymbol{f}$ دالة من A الى B يطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر A بفعل الدالة باسم **مدى الدالة** $(\mathrm{ran}\boldsymbol{f})$ ويرمز لها احيانا ب $\boldsymbol{f}(A)$
- $\mathrm{Ran}f = f(A) = \{b \mid b \in B, \exists a \in A \ni b = \boldsymbol{f}(a)\}$
- اذا كانت $B \longrightarrow A:$ $\boldsymbol{f}$ دالة من A الى B فان
  - $\mathrm{ran}\boldsymbol{f} \subseteq B$
  - $\boldsymbol{f}(A) \subseteq B$
- يختلف الرمز $f(a)$ عن $f(A)$ لان $f(a)$ هو صورة العنصر a بينما $f(A)$ هو مجموعة صور جميع عناصر المجموعة A بفعل الدالة f.

Example

- let f is function on real number $f : R \longrightarrow R$ defined as

$$\forall x \in R,\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{If integer number} \\ -1 & \text{If not integer number} \end{cases}$$

  - Dom$f$ = R
  - Codom$f$ =R
  - Ran$f$ ={1,-1}
- $f = \{ (x,1) \mid x \in R,\ x \text{ integer}\} \cup \{(x,-1) \mid x \in R,\ x \text{ not integer}\}$

نماذج من الدوال
الدالة المتباينة

- لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة من A الى B يقال ان الدالة f متباينة اذا كان كل عنصر من مستقرها (codomain) هو صور لعنصر واحد من المنطلق (domain), أي لا يوجد عنصران في المنطلق لهما نفس الصورة.
- $(\forall a_1,a_2 \in A)\ a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
- E.g: let A={a,b,c} , B={1,2,3,4}
  - $f1 = \{(a,1), (b,2), (c,3)\}$ متباينة
  - $f2 = \{(a,1), (b,1), (c,3)\}$ غير متباينة

- Let f :R$\longrightarrow$R , R is a real number , f (x)=x^2

هل الدالة متباينة ام لا

$\forall x \in R, f(x)=x^2 , f(-x)=x^2$

$f(1)=1 \quad , f(-1)=1$

$f(2)=4 , f(-2)=4$

اذن غير متباينة

الدالة الشاملة

- لتكن $f: A \longrightarrow B$ دالة من A الى B يقال ان الدالة f شاملة اذا كان كل عنصر من مستقرها (codomain) هو صور لعنصر واحد على الاقل من المنطلق (domain).
- $\forall b \in B , \exists a \in A \ni b = f(a)$
- بمعنى ان $\operatorname{ran} f = f(A) = B$
- E.g let A={ a, b ,c ,d } , B={ e, f, g}
  - $f1 = \{(a, e), (b,f), (c,g) (d,g)\}$ شاملة
  - $f2 = \{(a,e), (b,f), (c,f), (d,e)\}$ غير شاملة
  - $f3 = \{(a,e), (b,f), (c,g), (d,f)\}$ شاملة

الدالة المتقابلة

- لتكن $B \longrightarrow A: f$ دالة من A الى B يقال ان الدالة f تكون الدالة متقابلة اذا كانت متباينة وشاملة.
- E.g let A={1,3,5,7} , B={2,4,6,8}
  - f 1= { (1,2) , (3,4) , (5,2) , (7,4) }

- f 1 غير متباينة لان $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) = f(a_2)$
- f 1 غير شاملة لأنه يوجد عناصر في المستقر لم ترتبط المنطلق.

الدالة الثابتة

- لتكن f:A⟶B دالة من A الى B يقال ان الدالة f ثابتة اذا وجد عنصر واحد في B يكون صورة لكل عنصر في A ويعبر عنه:
- $\forall\ x \in A\ ,\ f\ (x)=c$
- $\mathrm{ran} f = f\ (A)=\{c\}$
- E.g let f :N⟶N ,

  $f\ (N)= \{1 \text{ if } n >=0\ ,\ 0 \text{ if } n < 0\}$

  هذه الدالة ثابتة لان جميع عناصر المدى تكون (1) لان المنطلق اعداد موجبة فقط

Identity Function الدالة الذاتية

- لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة من A الى B يقال ان الدالة f ذاتية اذا كانت صورة العنصر هي العنصر نفسه, وهي عندما تكون الدالة من A الى A ويرمز لها بالرمز (A^I)
- $\forall\ x \in A\ ,\ f(x)=x\ ,\ A^I(x)=x$
- $A^I:A \longrightarrow A$
- مثال : علاقة التساوي على المجموعة A={a,b,c}
- $\mathbf{A^I=\{(a,a),\ (b,b),\ (c,c)\}}$
- ملاحظة: A^I الدالة الذاتية هي دالة متباينة وشاملة ومتقابلة.

Inverse Function الدالة العكسية

- لتكن f:A$\longrightarrow$B دالة من A الى B فان العلاقة f^{-1}:B$\longrightarrow$A قد تحقق شروط الدالة او لا تحققها,

كما انه اذا كانت f^{-1}:B$\rightarrow$A *ليس بالضرورة ان تكون* f:A$\rightarrow$B دالة

الدالة العكسية هي العلاقة التي تقبل شروط الدالة اذا كانت f و f^{-1} أي ان

f:A$\longrightarrow$B تحقق شروط الدالة وf^{-1}:B$\longrightarrow$A تحقق شروط الدالة, وتكون الدالة عكسية اذا كانت دالة متقابلة

E.g: let A={4,5,6} , B={a,b,c} , if f:A$\rightarrow$B is inverse function?

f={(4,a), (5,b), (6,c)}

f^{-1}={(a,4), (b,5), (c,6)}

بما انه f و f^{-1} يحققان شروط الدالة $\therefore$ الدالة f عكسية.

e.g : $f(x) = x^2$ is inverse function on integer number?

Composition Function الدالة المركبة

- لتكن $f:A \longrightarrow B$ دالة من A الىB و $g:B \longrightarrow C$ دالة من B الى C , فان gof تكون دالة من المجموعة A الى المجموعة C وتكتب $g\,of : A \longrightarrow C$, وتتكتب ايضا

$(f\,og)\,(a) = f\,(g\,(a))$

e.g: let $f : N \longrightarrow N,\ \forall x \in N,\ f\,(x)=6x^2$

$g : N \longrightarrow N,\ \forall x \in N,\ g\,(x)=4x+3$

$gof\!: N \longrightarrow N,\ g\,of\,(x)=$

$g\,(f\,(x))= g(6x^2\,)=4(6x^2)+3 \rightarrow 24\,x^2+3$

$\therefore \forall x \in N,\ (g\,of)(x) = 24\,x^2+3$