من الصعوبات التي تواجهنا عند دراسة طرق التحليل الإحصائي متعدد المتغيرات هي الحاجة إلى فهم وتفسير العلاقة بين المتغيرات التي تشملها الظاهرة قيد الدراسة، لذا سوف ندرس بعض الاختبارات المهمة التي تساعدنا في فهم وتفسير تلك العلاقات.

أولا: توزيع هوتلنج: t^2 Hotelling test

تعريف:

إذا كان المتجه$\underline{d}\sim N_P(0,I)$ و$M\sim W_P(I,n)$ وكلاهما مستقل عن الآخر فإن المقدار

$nd'M^{-1}d$ له توزيع هوتلنج ويكتب$nd'M^{-1}d\sim T^2(p,n)$.

1- اختبار الفرضية المتعلقة بمتوسط مجتمع واحد

$$\mathbf{H_0}:\underline{\boldsymbol{\mu}}=\underline{\boldsymbol{\mu_0}}$$

إذا كان $X\sim N_P(\mu,\Sigma)$ وكانS_uهو التقدير غير متحيز ل Σ وكان $\overline{X}$ مقدر μ فإنه يمكن استخدام إحصاءه هوتلنج في اختبار الفرض أعلاه حيث تعرف الإحصاءة بالشكل التالي:

$$T_c^2=n(\overline{X}-\mu_0)'S_u^{-1}(\overline{X}-\mu_0)$$

حيث:

$$T_c^2\sim T^2(p,n-1)$$

وتتم مقارنةT_c^2 بالجدولية المناظرة لها حيث:

$$T_{(p,n-1)}=\left[\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{(p,n-p,\alpha)}\right]$$

ويتم رفض H_0 إذاكان $T_c^2\geq T_{(p,n-1,\alpha)}^2$

Example 1: If we have the following data,

X1	X2
22.0	**11.0**
24.5	**13.5**
23.1	**23.5**
24.5	**4.5**
12	**8.5**
14.5	**9.6**
10	**24**
14.6	**23**
13.6	**20**
27.0	**27**
20	**26**
23	**25.5**

Test the hypothesis

$H_0: \mu = (9,5)'$

$H_1: \mu \neq (9,5)'$

Using the Hotelling test

The solution:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{1i}}{12} = \frac{228.8}{12} = 19.06$$ وهو متوسط المجتمع الأول

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{2i}}{12} = \frac{216.1}{12} = 18.00$$ وهو متوسط المجتمع الثاني

متوسطات المجتمع هو

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 19.06 \\ 18.00 \end{pmatrix}$$

ولتكوين مصفوفة تباين المجتمع نحتاج لحساب مايلي:

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{12} X_{1i}^2\right) - \left((\sum_{i=1}^{12} X_{1i})^2 \Big/ n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{11}[4728.48 - (288.8)^2)/12] = 33.275$$

$$S_{22} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{12} X_{2i}^2\right) - \left((\sum_{i=1}^{12} X_{2i})^2/n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{11}[4600.4 - (216.1)^2/12] = 64.437$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{12} X_{1i}X_{2i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{12} X_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{12} X_{2i}\right)/n\right]$$

$$= \frac{1}{11}[4150.35 - (288.8)(216.1)/12] = 2.731$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.275 & 2.731 \\ 2.731 & 64.437 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{(33.275)(64.437) - (2.731)(2.731)} \begin{bmatrix} 64.437 & -2.731 \\ -2.731 & 33.275 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2136.719} \begin{bmatrix} 64.437 & -2.731 \\ -2.731 & 33.275 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.03015 & -0.00127 \\ -0.00127 & 0.01557 \end{bmatrix}$$

$$T_c^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$$

$$= 12[19.06 - 9, 18.00 - 5]' \begin{bmatrix} 0.03015 & 0.00127 \\ 0.00127 & 0.01557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.06 - 9 \\ 18.00 - 5 \end{bmatrix}$$

$$= 12[10.06, 13]' \begin{bmatrix} 0.286765372 \\ 0.189591613 \end{bmatrix}$$

$$= 12(32.884859642 + 2.464690969) = 64.19460733$$

$$T_c^2 = 64.19460733$$

ولحساب القيمة الجد ولية

$$T^2 = \frac{P(n-1)}{n-P} F_{p,n-p} = \frac{2 * 11}{10} F_{2,10,0.05}$$

$$= \frac{22}{10} F_{4.10} = 9.02$$

نجد أن $T^2 = 64.19 > 9.02$ وبالتالي فإننا نرفض فرض العدم في مقابل الفرض البديل عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

Example 2: If we have the following data,

X1	X2	X3
3.7	48.5	**9.3**
5.7	65.1	**8.0**
3.8	47.2	**10.9**
3.2	53.2	**12.0**
3.1	55.5	**9.7**
4.6	36.1	**7.9**
2.4	24.8	**14.0**
7.2	33.1	**7.6**
6.7	47.4	**8.5**
5.4	54.1	**11.3**
3.9	36.9	**12.7**
4.5	58.8	**12.3**
3.5	27.8	**9.8**
4.5	40.2	**8.4**
1.5	13.5	**10.1**
8.5	56.4	**7.1**
4.5	71.6	**8.2**
6.5	52.8	**10.9**
4.1	44.1	**11.2**
5.5	40.9	**9.4**

Test the hypothesis

$H_0: \mu = [4,50,10]'$

$H_1: \mu \neq [4,50,10]'$

وذلك عند مستوى معنوي$\propto$=0.10

Using the Hotelling test

The Solution:

$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} X_{1i}}{20} = \frac{92.8}{20} = 4.640$ متوسط المجتمع الأول

$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} X_{2i}}{20} = \frac{908}{20} = 45.400$ متوسط المجتمع الثاني

$\overline{X}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{3i}}{20} = \frac{199.3}{20} = 9.965$ متوسط المجتمع الثالث

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{1i}^2\right) - \left((\sum_{i=1}^{20} X_{1i})^2 / n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{19}[485.3 - (92.8)^2/20] = 2.879$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{1i}X_{2i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{20} X_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{20} X_{2i}\right)/n\right]$$

$$= \frac{1}{19}[4403.31 - (92.8)(908)/20] = 10.01$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{1i}X_{3i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{20} X_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{20} X_{3i}\right)/n\right]$$

$$= \frac{1}{19}[4403.31 - (92.8)(908)/20] = -1.809$$

$$S_{22} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{2i}^2\right) - \left((\sum_{i=1}^{20} X_{2i})^2/n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{19}[45019.18 - (908)^2/20] = 199.798$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{2i}X_{3i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{20} X_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{20} X_{3i}\right)/n\right]$$

$$= \frac{1}{19}[8941.06 - (908)(199.3)/20] = -5.64$$

$$S_{33} = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{20} X_{3i}^2\right) - \left((\sum_{i=1}^{20} X_{3i})^2/n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{19}[2054.95 - (199.3)^2/20] = 3.628$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.010 & -1.810 \\ 10.010 & 199.798 & -5.64 \\ -1.810 & -5.64 & 3.628 \end{bmatrix}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2.879 & 10.002 & -1.810 & 2.879 & 10.002 \\ 10.002 & 199.798 & -5.627 & 10.002 & 199.798 \\ -1.810 & _5.627 & 3.628 & -1.810 & -5.627 \end{array}\right]$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.586 & _0.022 & 0.258 \\ _0.022 & 0.006 & _0.002 \\ 0.258 & _0.002 & 0.402 \end{bmatrix}$$

ولحساب احصائية الاختبار T^2 وجد أن:

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$$

$$=20[4.640 - 4\ ,45.400 - 50,9.965 - 10]\begin{bmatrix} 0.586 & _0.022 & 0.258 \\ _0.042 & 0.006 & _0.002 \\ 0.258 & _0.002 & 0.402 \end{bmatrix} T^2$$

$$=20[0.640 - 4.600, -0.035]\begin{bmatrix} 0.467 \\ _0.042 \\ 0.160 \end{bmatrix} = 9.74$$

نقارن قيمة T^2المحسوبة بالقيمة الجدولية:

$$T^2_{(p,n-1,\alpha)} = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{P,n-p,0.01} = \frac{(19)3}{17} F_{3,17,0.01} = 3.353(2.44)$$
$$= 8.18$$

نجد أن $T^2 = 9.74 > 8.18$وبالتالي فإننا نرفض فرض العدم في مقابل الفرض البديل عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

2- اختبار تساوي متوسطي مجتمعين

$$H_0 : \underline{\boldsymbol{\mu}_1} = \underline{\boldsymbol{\mu}_2}$$

حيث أن:- μ_1متوسط المجتمع الأول، μ_2متوسط المجتمع الثاني.

وإحصاءه الاختبار المستخدمة كالتالي:

$$T_c^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2-2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S_u^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim T^2_{(p,n_{1+}n_2-2)}$$

ولحساب القيمة الجدولية

$$T_c^2 = \frac{(n_1+n_2-2)p}{(n_1+n_2-p-1)} F_{p,n_1+n_2-p-1,(\alpha)}$$

والقرار هو الرفض إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية

$$S_u = \frac{n_1 s_1 + n_2 s_2}{n_{1+}n_2 - 2}$$

حيث أن:

$\bar{X}_1$:متجه متوسطات العينات المسحوبة من المجتمع الأول.

$\bar{X}_2$: متجه متوسطات العينات المسحوبة من المجتمع الثاني.

Example 3: If we have the following data,

المجتمع الثاني		المجتمع الاول	
X1	X2	X1	**X2**
15	112	10	**133**
12	111	17	**120**
10	120	12	**115**
13	140	15	**157**
17	123	20	**130**
20	115	33	**125**
30	102	47	**95**

Test the hypothesis:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

The Solution:

$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{1i}}{7} = \frac{117}{7} = 16.71$ متوسط المجتمع الأول

$\overline{X}_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{2i}}{7} = \frac{823}{7} = 117.57$ متوسط المجتمع الأول

$\overline{X}_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{1i}}{7} = \frac{154}{7} = 22$ متوسط المجتمع الثاني

$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_{2i}}{7} = \frac{875}{7} = 125$ متوسط المجتمع الثاني

وبهذا فإن متجه المتوسطات للمجتمع الأول هو:

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 16.71 \\ 117.57 \end{pmatrix}$$

أما متجه المتوسطات للمجتمع الثاني هو:

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 125 \end{pmatrix}$$

لتكوين مصفوفة التباينات للمجتمع الأول نحتاج حساب:

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{1i}^2 - \left((\sum_{i=1}^{7} X_{1i})^2 / n\right)\right] = \frac{1}{6}\left[2227 - \frac{(117)^2}{7}\right]$$

$$= 45.238$$

$$S_{22} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{2i}^2 - \left((\sum_{i=1}^{7} X_{2i})^2 / n\right)\right] = \frac{1}{6}\left[97623 - \frac{(823)^2}{7}\right]$$

$$= 143.619$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{7} X_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{7} X_{2i}\right)/n\right]$$

$$= [13483 - 13755.85] = -45.475$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45.238 & -45.475 \\ -45.475 & 143.619 \end{pmatrix}$$

ولتكوين مصفوفة التباينات للمجتمع الثاني نحتاج لحساب:

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{1i}^2 - \left((\sum_{i=1}^{7} X_{1i})^2 / n\right)\right] = \frac{1}{6}\left[4456 - \frac{(154)^2}{7}\right] = 178$$

$$S_{22} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{2i}^2 - \left((\sum_{i=1}^{7} X_{2i})^2 / n\right)\right] = \frac{1}{6}\left[111513 - \frac{(875)^2}{7}\right]$$

$$= 356.33$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{7} X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{7} X_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{7} X_{2i}\right)/n\right]$$

$$= \frac{1}{6}[18295 - 19250] = -159.16$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 178 & -159.16 \\ -159.16 & 356.33 \end{pmatrix}$$

$$S_u = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{6\begin{pmatrix} 45.238 & -45.475 \\ -45.475 & 143.619 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 178 & -159.16 \\ -159.16 & 356.33 \end{pmatrix}}{12}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 271.428 & -272.85 \\ -272.85 & 861.714 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1068 & -954.96 \\ -954.96 & 2137.98 \end{pmatrix}}{12}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1339.428 & -1227.81 \\ -1227.81 & 2999.694 \end{pmatrix}}{12}$$

$$S = \begin{pmatrix} 111.619 & -102.3175 \\ -102.3175 & 249.97 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{17432.52}\begin{pmatrix} 249.97 & 102.3175 \\ 102.3175 & 111.619 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.01433 & 0.005869 \\ 0.005869 & 0.0064029 \end{pmatrix}$$

$$T_c^{-1} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 - 2}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$$

$$\frac{7 * 7}{7 + 7 - 2}[16.71 - 22, 117.57 - 125]' \begin{bmatrix} 0.01433 & 0.005869 \\ 0.005869 & 0.0064029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16.71 - 22 \\ 117.57 - 125 \end{bmatrix}$$

$$\frac{49}{12}[-5.29, -7.43]' \begin{bmatrix} -0.11 \\ -0.07 \end{bmatrix}$$

$$\frac{49}{12} * 1.102 = 4.499$$

لحساب القيمة الجدولية

$$C^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - p - 1)} F_{p, n_1 + n_2 - p - 1(\alpha)}$$

$$= \frac{(7 + 7 - 2)2}{(7 + 7 - 2 - 1)} F_{2, 7+7-2-1(0.05)}$$

2.1818*3.98=8.683

نجد أن $T^2 = 4.25 < 8.68$ وبالتالي فإننا نرفض فرض البديل في مقابل الفرض العدم عند

مستوى معنوية $\alpha = 0.05$