العمليات العشوائية (التصادفية): Stochastic Processes

كلمة عشوائية تعني الاحتمالية، أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن، ومن ثم عندما ندرس العمليات العشوائية فإننا ندرس دوال عشوائية في الزمن.

سؤال/ Classify the types of stochastic processes with examples?

1- عملية عشوائية ذات حيز حالة متقطع وحيز معلمة متقطع.

مثال: ليكن X(t) متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الصورة (حيز حالة)، عند رمي قطعة نقود t من المرات (t حيز معلمة).

2- عملية عشوائية ذات حيز حالة متقطع وحيز معلمة مستمر.

مثال: ليكن X(t) متغير عشوائي يمثل عدد الأسماك (حيز حالة)، في بحيرة معينة (حيز معلمة t يعتمد على حجم البحيرة).

3- عملية عشوائية ذات حيز حالة مستمر وحيز معلمة متقطع.

مثال: ليكن X(t) متغير عشوائي يمثل أعلى نسبة نجاح في مادة البرمجة في الامتحان النهائي (حيز حالة) للعشر أعوام السابقة (حيز معلمة t).

4- عملية عشوائية ذات حيز حالة مستمر وحيز معلمة مستمر.

مثال: ليكن X(t) متغير عشوائي يمثل درجات الحرارة (حيز حالة) في محافظة بغداد، خلال الزمن t (حيز معلمة).

****

سلاسل ماركوف *Markov Chains*

إن أسلوب تحليل ماركوف هو أسلوب يتعامل مع احتمالات حدوث حدث معين في المستقبل مستندا إلى تحليل بعض الاحتمالات، أي انه أسلوب علمي لدراسة وتحليل ظاهرة في الفترة الحالية من اجل التنبؤ بسلوكها في المستقبل.

- تعريف سلاسل ماركوف

تعرف سلسلة ماركوف على أنها سلسلة من متغيرات عشوائية ذات قيم متقطعة X1,X2,X3,X4,.... والذي يمثل التوزيع المشروط conditional للقيمة Xn+1 بتحقيق قيم المتغيرات العشوائية X1,X2,X3,X4,.... انه يعتمد فقط على القيمة Xn وبتعبير رياضي واضح

$$Pjk=Pr\{Xn+1=k \mid Xn=j, Xn-1=j1,Xn-2=j2,Xn-3=j3,....,X0-=jn-1\}$$

أي يمكن كتابة هذه المعادلة وفقا لمنطق ماركوف وكما يلي:

$$Pjk=Pr\{Xn+1=k \mid Xn=j\}$$

- المصفوفة الانتقالية Transition Matrix

تتكون المصفوفة الانتقالية أو مصفوفة ماركوف من مصفوفة مربعة أي أن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة، وتحتوي عناصرها على نسب احتمالية ويرمز لها عادة بالرمز P وتتميز بصفتين هما:

- كل عنصر من عناصر المصفوفة يجب أن يمثل بقيمة احتمالية، أي بمعنى $0 \leq Pij \leq 1$

- مجموع عناصر كل صف من صفوف المصفوفة يساوي الواحد الصحيح.

$$\sum_{\forall j} Pij = 1$$

وبشكل عام تكون مصفوفة ماركوف كالآتي:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots \quad (1)$$

ولحساب قيمة احتمال انتقال الظاهرة من الحالة i الى الحالة j بعدد من الخطوات أو الوحدات الزمنية مقدارها m باستعمال الصيغة الآتية:

$$P_{ij}^{m} = (X_{n+m} = j / X_n = i)$$

وتدعى هذه بالاحتمالات الانتقالية خلال m من الوحدات الزمنية.

- <u>الأستقرارية وحالة الثبات</u> Stationary and Steady State

إن مفهوم الأستقرارية يعني بشكل عام عدم تغير الصفات الإحصائية للعملية التصادفية بدرجة أو بأخرى بمرور الزمن.

أما حالة الثبات فتظهر عندما تستمر العملية التصادفية لزمن طويل إذ تستقر نسب عدد الانتقالات لكل حالة عند قيمة معينة، وتدعى بالاحتمالات المستقرة لتلك الحالة، أي يظهر سلوك $P_{(i,j)}^{m}$

عندما $m \to \infty$ لذلك فان التوزيع المستقر يعرف كالآتي:

المتجه الاحتمالي $u^s = [u_1^s, u_2^s, \ldots, u_n^s]$ الذي يحقق

$u^s = u^s * P^m$ يسمى التوزيع المستقر للعملية التصادفية stationary distribution عندما تكون P مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لسلاسل ماركوف وذات m من الحالات المنتهية فأن :

$$\lim_{m \to \infty} P^m = U = \begin{pmatrix} u \\ u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} \ldots\ldots \quad (2)$$

حيث ان :

تمثل المتجه الاحتمالي الثابت والوحيد. $u = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n)$

$$\sum_{j=1}^{m} u = 1 \ , \quad 0 \le u \le 1$$

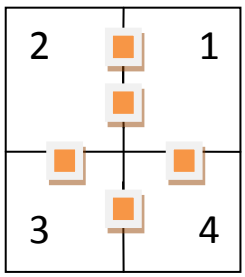
كما يمكن إيجاد التوزيع المستقر للفترة القادمة من خلال الصيغة الآتية:

UP=U..... (3)

أي إذا اقتربت m من ∞ فان احتمالات الانتقال ذات m من الخطوات للمصفوفة P_{ij} ستعتمد على الحالة الأخيرة وليس على الحالة الابتدائية، وهذا يعني إن بعد مرور عدد كبير من المحاولات سوف تصل السلسلة إلى حالة الاستقرار والثبات.

****

Example: The diagram on the bottom shows four compartments with doors leading from one to another. A mouse in any compartment is equally likely to pass through each of the doors of the compartment. Find the transition matrix of the Markov Chain.



The Solution: The transition matrix of the Markov Chain is:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Q/ If the mouse starts to move from the second compartment, what is the probability that it will be in the same compartment after three steps?

the initial probability distributed is $\pi_0 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$, so we must compute:

$\pi_1 = \pi_0 P, \ \pi_2 = \pi_1 P, \ \pi_3 = \pi_2 P$

$$\pi_1 = \pi_0 P = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & ⅔ & 0 & ⅓ \\ ⅔ & 0 & ⅓ & 0 \\ 0 & ½ & 0 & ½ \\ ½ & 0 & ½ & 0 \end{pmatrix} = (⅔ \quad 0 \quad ⅓ \quad 0)$$

$$\pi_2 = \pi_1 P = (⅔ \quad 0 \quad ⅓ \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & ⅔ & 0 & ⅓ \\ ⅔ & 0 & ⅓ & 0 \\ 0 & ½ & 0 & ½ \\ ½ & 0 & ½ & 0 \end{pmatrix} = \left(0 \quad \frac{11}{18} \quad 0 \quad \frac{7}{18}\right)$$

$$\pi_3 = \pi_2 P = \left(0 \quad \frac{11}{18} \quad 0 \quad \frac{7}{18}\right)\begin{pmatrix} 0 & ⅔ & 0 & ⅓ \\ ⅔ & 0 & ⅓ & 0 \\ 0 & ½ & 0 & ½ \\ ½ & 0 & ½ & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{65}{108} \quad 0 \quad \frac{43}{108} \quad 0\right)$$

∴ the probability that it will be in the second compartment after three steps is 0.

Q/ In the long time, what is the probability that it will be in the second compartment?

$$\alpha P = \alpha$$

$$\alpha = (x \quad y \quad z \quad m)$$

$$(x \quad y \quad z \quad m)\begin{pmatrix} 0 & ⅔ & 0 & ⅓ \\ ⅔ & 0 & ⅓ & 0 \\ 0 & ½ & 0 & ½ \\ ½ & 0 & ½ & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z \quad m)$$

$$\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}m = x$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}z = y$$

$$\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}m = z$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = m$$

$$Let\ x = 1 \xrightarrow{from\ 1\&2} y = 1$$

$$\xrightarrow{from\ 1} m = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{from\ 3} z = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = (x \quad y \quad z \quad m) = \left(1 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$$

$$1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{\alpha}{\frac{10}{3}} = (0.3 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.2)$$

Then the probability that the mouse will be in the second compartment, in the long time is 0.3.

****

Chapman-Kolmogorov equation: معادلة جابمان - كولمكروف

Example: Let $\{x_n, n \geq 0\}$ be a Markov Chain with state space(0,1,2), and initial distribution $\pi_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ and the Transition Probability Matrix is:

$$P = \begin{matrix} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} ¾ & ¼ & 0 \\ ¼ & ½ & ¼ \\ 0 & ¾ & ¼ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Compute:

1- $p[x_1 = 1 \,/\, x_0 = 2] = p_{21} = \frac{3}{4}$

2- $p[x_2 = 2 \,/\, x_1 = 1] = p_{12} = \frac{1}{4}$

3- $p[x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 2] = p[x_0 = 2] * p_{21} * p_{12} = \frac{1}{3} * \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

4- $p[x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 1, x_0 = 2] = p[x_0 = 2] * p_{21} * p_{12} * p_{21} = \frac{1}{3} * \frac{3}{4} * \frac{1}{4} * \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$

****

Example: Let $\{x_n, n \geq 0\}$ be a Markov Chain with state space(1,2), and initial distribution $\pi_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ and the Transition Probability Matrix is:

$$P = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Compute: 1) $p[x_1 = 2, x_4 = 1, x_6 = 1, x_{18} = 1/x_0 = 1] = p_{12} * p_{21}^3 * p_{11}^2 * p_{11}^{12}$

$$p^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5*0.5+0.5*0.3 & 0.5*0.5+0.5*0.7 \\ 0.3*0.5+0.7*0.3 & 0.3*0.5+0.7*0.7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}$$

$$p^3 = p^2 * p = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0.40*0.5+0.60*0.3 & 0.40*0.5+0.60*0.7 \\ 0.36*0.5+0.64*0.3 & 0.36*0.5+0.64*0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.372 & 0.628 \end{pmatrix}$$

من الممكن إيجاد الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف بعد m من الخطوات لمصفوفة ثنائية (2x2) فقط:

$$\text{Let } p = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

و بعد ضرب المصفوفة أعلاه m من المرات نحصل على المصفوفة الآتية:

$$p^m = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + (1-a-b)^m * \frac{a}{a+b} & \frac{a}{a+b} - (1-a-b)^m * \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} - (1-a-b)^m * \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^m * \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

$$\therefore p^m$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{0.3}{0.5+0.3} + (1-0.5-0.3)^m * \frac{0.5}{0.5+0.3} & \frac{0.5}{0.5+0.3} - (1-0.5-0.3)^m * \frac{0.5}{0.5+0.3} \\ \frac{0.3}{0.5+0.3} - (1-0.5-0.3)^m * \frac{0.3}{0.5+0.3} & \frac{0.5}{0.5+0.3} + (1-0.5-0.3)^m * \frac{0.3}{0.5+0.3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore p^m = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + (0.2)^m * \frac{5}{8} & \frac{5}{8} - (0.2)^m * \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} - (0.2)^m * \frac{3}{8} & \frac{5}{8} + (0.2)^m * \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

1) $p[x_1 = 2, x_4 = 1, x_6 = 1, x_{18} = 1 / x_0 = 1] = p_{12} * p_{21}^3 * p_{11}^2 * p_{11}^{12}$
$= 0.5 * 0.372 * 0.4 * (\frac{3}{8} + (0.2)^{12} * \frac{5}{8}) = 0.5 * 0.372 * 0.4 * 0.375 = 0.0279$

2) $p[x_2 = 1, x_7 = 2, x_9 = 2 / x_0 = 1] = p_{11}^2 * p_{12}^5 * p_{22}^2 = 0.4 * \left(\frac{5}{8} - (0.2)^5 * \frac{5}{8}\right) * 0.64$
$= 0.16$

3) $p[x_2 = 1, x_0 = 1] = p[x_0 = 1] * p_{11}^2 = \frac{1}{3} * 0.40 = 0.13$

4) $p[x_2 = 1, x_3 = 2, x_6 = 1/x_0 = 2] = p_{21}^2 * p_{12} * p_{21}^3 = 0.36 * 0.5 * 0.372 = 0.067$

5) $p[x_2 = 1, x_7 = 2] = p[x_0 = 1, x_2 = 1, x_7 = 2] + p[x_0 = 2, x_2 = 1, x_7 = 2]$
$= p[x_0 = 1] * p_{11}^2 * p_{12}^5 + p[x_0 = 2] * p_{21}^2 * p_{12}^5$
$= \frac{1}{3} * 0.40 * 0.63 + \frac{2}{3} * 0.36 * 0.63 = 0.23$

****

تصنيف حالات سلاسل ماركوف: Classification of states of Markov Chains

1- يقال لسلسلة ماركوف بأنها منتهية Finite أذا احتوت المسألة قيد الدراسة على k من الحالات، حيث أن k عدد صحيح موجب ومحدد، كما يقال بأنها غير منتهية Infinite أذا كانت عدد الحالات التي تحتويها المسألة قابلة للعد ولا نهائية.

2- يقال بأنه من الممكن الوصول للحالة j من الحالة i، أذا كان من الممكن بلوغ الحالة j من الحالة i في عدد منتهي من المراحل، ويشار لذلك بالشكل $i \to j$. حيث يطلق على هذه الحالة (أمكانية الوصول) Accessibility.

3- يقال للحالتين i , j بأنهما متبادلتان، أذا كان من الممكن الوصول لأحدهما من أخرى، ويشار لذلك $i \leftrightarrow j$ ، حيث يطلق على هذه الحالة حالة المبادلة Communication، وتحقق الشروط التالية:
- $i \to j \ \& \ j \to i$
- أذا كان $j \leftrightarrow k$ فان $i \leftrightarrow k$

4- يقال للحالة *i* بأنها حالة عودة *recurrent* أذا وفقط أذا كان من المؤكد رجوع العملية للحالة *i* التي سبق غادرتها، ويقال لحالة العودة *i* بأنها:
- صفرية *null recurrent* أذا وفقط أذا كان العدد المتوقع من المراحل اللازمة لعودة العملية للحالة *i* هو عدد غير منتهي.
- موجبة *positive recurrent* أذا وفقط أذا كان العدد المتوقع من المراحل اللازمة لعودة العملية للحالة *i* هو عدد منتهي.

5- يقال للحالة *i* بأنها حالة زوال *transient state* أذا وفقط أذا كان هناك احتمال موجب بأن لا تعود العملية للحالة *i* التي سبق وغادرتها.

6- يقال للحالة *i* بأنها ماصة *absorbing state* أذا وفقط أذا كان $P_{ii} = 1$.

7- يقال لحالة العودة i بأنها دورية periodic بطول دورة مقدارها L إذا كان $L \geq 2$، كما ويقال للحالات ذات طول دورة يساوي واحد بأنها غير دورية.

8- يقال لحالة i بأنها ثبوتية ergodic state، أذا كانت غير دورية وذات عودة موجبة.

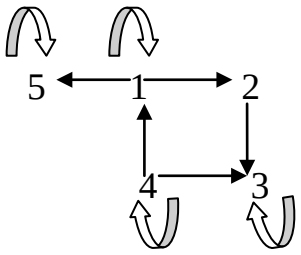
9- يقال لسلسلة ماركوف أنها غير قابلة للاختزال irreducible أذا كانت مجموعة كافة الحالات هي المجموعة المغلقة الوحيدة لهذه الحالات، أو أذا لم تحتوي على مجموعة جزئية مغلقة، أو بتعبير آخر أذا كانت جميع الحالات التي تنتمي أليها متبادلة مع بعضها.

10- يقال لمجموعة من الحالات بأنها مغلقة closed أذا كان من غير الممكن للعملية الوصول إلى حالة خارج المجموعة من حالة داخلها. أن من بعض الخواص المفيدة والمهمة في تصنيف سلاسل ماركوف مما يرتبط بالمجموعات المغلقة هي:
- يقال للحالة التي تؤلف مجموعة مغلقة بمفردها بأنها حالة ماصة.

- يقال للمجموعة المغلقة بأنها غير قابلة للاختزال، أذا لم تحتوي على مجموعة جزئية فعلية منها، أيضا مغلقة.
- يقال لسلسة ماركوف بأنها غير قابلة للاختزال، أذا كانت المجموعة المغلقة الوحيدة فيها هي تلك التي تحتوي على جميع الحالات.

Q- Classify the states of the markov chain with the following transition matrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} ⅓ & ⅓ & 0 & 0 & ⅓ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ½ & 0 & ¼ & ¼ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

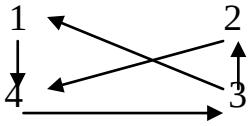


1- السلسلة منتهية.
2- توجد ثلاث مجاميع {1,2,4}، {3}، {5}.
3- توجد حالتين للامتصاص 3و5.
4- المجاميع غير قابلة للاختزال.
5- المجموعة {1,2,4} زوال لأن 4 حالة زائلة تصل 1و2.
6- {3} و {5} حالتين ماصتين أذا كلاهما غير دوريتين وكذلك المجموعة {1,2,4} هي أيضا غير دورية لأن فيها $L=1$.
7- المجموعة غير ثبوتية لأنها زوال.

****

Q- Classify the states of the markov chain with the following transition matrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ ½ & ½ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

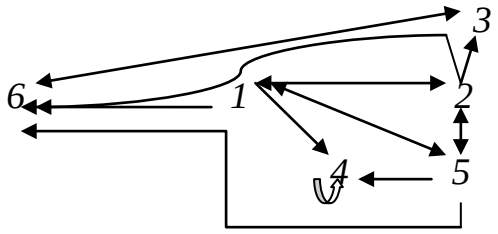


1- السلسلة منتهية.
2- السلسلة دورية بطول دورة $L=3$.
3- غير قابلة للاختزال.

****

Q- Classify the states of the markov chain with the following transition matrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1- سلسلة منتهية.
2- المجاميع {4}،{ 6و3 }،{ 1و2و5 }، غير قابلة للاختزال.
3- 4 حالة ماصة.
4- { 6و3 } حالة عودة موجبة، { 1و2و5 } حالة زوال.
4- { 6و3 } و { 1و2و5 } دورية حيث بطول دورة(2) .
5- { 6و3 } غير ثبوتية.

****

عملية بواسون Poisson Process

وهي عملية عشوائية بفضاء معلمة متصل وفضاء حالة متقطع، حيث تصف عدد الحوادث العشوائية التي تحدث في فترة زمنية معينة. وغالبا ما نشير إلى هذه الحوادث بالوصول، مثل عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى تحويله هاتفية، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين، عدد الزبائن الذين يصلون إلى سوق معين، عدد الأشخاص الذين ينتظرون في صف لتلقي خدمة معينة،... حيث أن $\{N_t; t \geq 0\}$ عملية بواسون أذا تحقق ما يلي:

1- تكون العملية متجانسة مع الزمن time-homogeneous، أي أن لأي عدد صحيح غير سالب k ، فأن احتمال $P(N_{t,t+1} = k)$ يكون مستقل عن t، وهذا يكافئ أن $N_{0,t}, N_{t,t+1}$ لهما نفس التوزيع.

2- يكون للعملية زيادات مستقلة، بمعنى $N_{0,t}, N_{t,t+1}$ يكونان مستقلين.

3- تكون عملية منظمة (مرتبة) *orderly*، بمعنى أن $\lim_{t\to 0} \frac{P(N_{t,t+1}\geq 2)}{t} = 0$.

then the number of events in any interval of length (t) is poisson distribution with mean λt for all $t \geq 0$

$$\therefore P(N_t = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

Example: Let $\{N_t; t \geq 0\}$ *is poisson process with* $\lambda = 10$*, compute:*

1- $P[N_{2.5} = 5, N_{3.5} = 10] = P[N_{2.5} = 5] * P[N_{3.5} - N_{2.5} = 10 - 5] = P[N_{2.5} = 5] * P[N_1 = 5] = \frac{(10*2.5)^5 e^{-(10*2.5)}}{5!} * \frac{(10*1)^5 e^{-(10*1)}}{5!} =$

2- $P[N_{20} = 30 \backslash N_6 = 15] = \frac{P[N_6=15, N_{20}=30]}{P[N_6=15]} = \frac{P[N_6=15]*P[N_{20}-N_6=30-15]}{P[N_6=15]} = P[N_{14} = 15] = \frac{(10*14)^{15} e^{-(10*14)}}{15!} =$

Example: *Let* $\{N_t; t \geq 0\}$ *is Poisson process with* $\lambda = 5$*, compute:*

1- $P[N_4 = 5] = \frac{(5*4)^5 e^{-(5*4)}}{5!} =$

2- $P[N_4 = 5, N_6 = 7, N_{10} = 11] = P[N_4 = 5] * P[N_2 = 2] * P[N_4 = 4] = \frac{(5*4)^5 e^{-(5*4)}}{5!} * \frac{(5*2)^2 e^{-(5*2)}}{2!} * \frac{(5*4)^4 e^{-(5*4)}}{4!} =$