

Chapter Two

الفصل الثاني

المجال الكهربائي المستقر في المواد العازلة

Electrostatic Field in Vacuum

Sequence:11

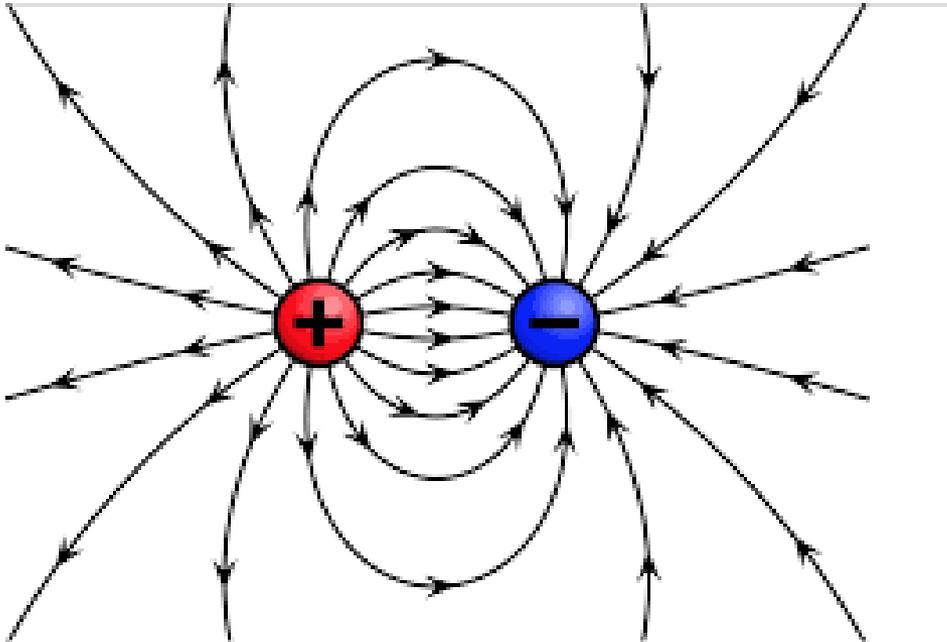
مدرس المقرر : د. وائل عبد اللطيف كديمي

• (4-2) الجهد الكهربائي

• (5-2) قانون كاوس

• (6-2) معادلة بوازان ومعادلة لابلاس

• (4-2) أمثلة ومسائل



(4-2) الجهد الكهربائي

يعتبر الجهد الكهربائي من أهم الكميات الفيزيائية التي تصف المجال الكهربائي ، حيث أن مقدار الجهد الكهربائي لنقطة ما في المجال الكهربائي يتم تحديده بالنسبة إلى نقطة مرجعية أخرى ، وكما أن الجسم الساقط في مجال الجاذبية الأرضية يسقط من النقطة الأعلى ارتفاعاً إلى النقطة الأقل ارتفاعاً ، فإن الشحنة الموجبة في المجال الكهربائي تندفع من النقطة الأعلى جهداً إلى النقطة الأقل جهداً.

من المعلوم انه لو وضعت شحنة كهربائية في مجال كهربائي لتأثرت بقوة . وهذا يعني ان تحريك هذه الشحنة من نقطة الى اخرى يتطلب انجاز شغل وبدلالة هذا الشغل سنعرف الجهد الكهربائي ونرمز له بالرمز (Φ) ليساعدنا في وصف ودراسة المجالات الكهربائية جنباً الى جنب مع المجال الكهربائي (\vec{E}) . والجهد هو كمية عددية وهذا يجعل التعامل معه رياضياً اسهل بكثير من التعامل مع الكمية الاتجاهية (\vec{E}) . وبذلك يمكن لنا تمثيل فرق الجهد بين نقطتين a و b بأنه هو الشغل الخارجي W_{ab} المنجز لتحريك الشحنة الاختبارية q_0 بين تلك النقطتين:

- $\Phi_B - \Phi_A = \frac{W_{ab}}{q_0}$

- وقد اصطلح ان يكون الجهد عند نقطة بعيدة بعداً كبيراً (لانهايا) عن كل الشحنات يساوي صفراً . وعلى هذا الاساس لو اخترنا النقطة A في المالانهاية لاصبح الجهد Φ_A صفراً . وبصورة عامة نعرف الجهد عند اية نقطة واقعة في المجال الكهربائي حسب المعادلة التالية:

- $\Phi = \frac{W \text{ (joule)}}{q_0 \text{ (Coulomb)}}$

- اي ان الجهد الكهربائي عند اي نقطة هو الشغل لوحدة الشحنة الواجب انجازه لنقل شحنة موجبة اختبارية صغيرة من المالانهاية الى تلك النقطة . مع التاكيد على نقطتين:

- اولاً : ان تكون الشحنة الاختبارية صغيرة بحيث يكون تحريكها من نقطة لاخرى لا يغير من المجال الكهربائي الاصلي.

- ثانياً :اختيار نقطة مرجع يتفق على قيمة الجهد عندها مسبقاً . وفي تعريفنا للجهد اخترنا النقطة

- الملائمة واعتبرنا الجهد عندها صفراً. ففي كثير من مسائل الدوائر الكهربائية يتخذ جهد الأرض مرجعاً لقياس الجهد ويعتبر جهداً مساوياً للصفر.

- أما عند ازاحة شحنة مقدارها Q ازاحة تفاضلية مقدارها dl في مجال كهربائي E فإن الشغل المنجز على هذه الشحنة من النقطة a الى النقطة b هو:

- $$W_{ab} = - \int_a^b Q \cdot \vec{E} dl$$

- الإشارة السالبة تعني ان الشغل قد أنجز ضد المجال الكهربائي.

- أما اذا كانت حركة الشحنة على مسار مغلق فإن الشغل المنجز يساوي صفراً، أي أن:

- $$W_{ab} = - \oint Q \cdot \vec{E} dl = 0$$

- $$\therefore \oint \vec{E} dl = 0$$

• أي ان المجال الكهربائي المستقر هو مجالاً محافظاً. باستخدام نظرية ستوك نحصل على:

• $\therefore \nabla \times \vec{E} = 0$

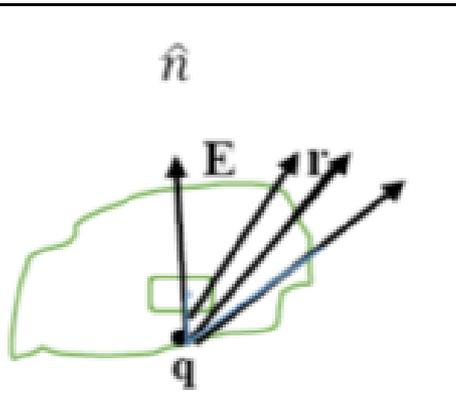
• $\therefore \nabla \times \nabla\Phi = 0$

• اذن نستنتج من العلاقات اعلاه بان:

• $\vec{E} = -\nabla\Phi$

• (5-2) قانون كاوس

أوجد كاوس العلاقة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يضمها السطح. بما أن المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية (q) واقعة في نقطة الأصل عند نقطة محددة بالمتجه \vec{r} يساوي :



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق والذي يحيط بالشحنة (q) سنحصل على:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da$$

$$\text{but } \oint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da = 4\pi$$

$$\therefore \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

الصيغة التكاملية لقانون كاوس

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

تشير المعادلة اعلاه الى ان التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على اي سطح مغلق (الفيض) يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوما على سماحيته.

ولأيجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس نستخدم نظرية التباعد .

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

• (6-2) معادلة بواسان ومعادلة لابلاس

• معادلة بواسان هي معادلة تفاضلية لحساب الجهد (Φ) اذا عرفنا التوزيع الحجمي للشحنة (ρ) وتعطى بالمعادلة التالية:

$$\bullet \quad -\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

• أما اذا كان التوزيع الحجمي للشحنة ($\rho = 0$) فإن معادلة بواسان تأخذ الصيغة التالية:

$$\bullet \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

• وتسمى هذه المعادلة معادلة لابلاس ومنها يمكن حساب الجهد في المناطق الخالية من الشحنات.

• واجب بيتي (1) ضع علامة صح امام الجملة الصائبة وعلامة خطأ امام الجملة الخاطئة لكل مما يأتي :

- (1) يعتبر الجهد الكهربائي من أهم الكميات الفيزيائية التي تصف المجال الكهربائي. ()
- (2) أن مقدار الجهد الكهربائي لنقطة ما في المجال الكهربائي يتم تحديده بالنسبة إلى نقطة مرجعية أخرى. ()
- (3) أن الجسم الساقط في مجال الجاذبية الأرضية يسقط من النقطة الأقل ارتفاعاً إلى النقطة الأعلى ارتفاعاً. ()
- (4) إن الشحنة الموجبة في المجال الكهربائي تندفع من النقطة الأعلى جهداً إلى النقطة الأقل جهداً. ()
- (5) اذا وضعت شحنة كهربائية في مجال كهربائي لتأثرت بقوة، وهذا يتطلب انجاز شغلز ()
- (6) الجهد هو كمية عددية وان التعامل معه رياضيا اسهل بكثير من التعامل مع المجال الكهربائي. ()
- (7) أن فرق الجهد بين نقطتين يمثل الشغل الخارجي المنجز لتحريك شحنة كهربائية معينة بين تلك النقطتين . ()

• (8) ان الجهد عند نقطة بعيدة بعداً كبيراً (لانهايا) عن كل الشحنات يساوي صفراً. ()

• (9) يعرف فرق الجهد بين نقطتين a و b بالمعادلة التالية: $\Phi_B - \Phi_A = \frac{W_{ba}}{q_0}$ ، حيث ان W_{ab} يمثل

الشغل الخارجي المنجز لتحريك الشحنة الاختبارية q_0 بين تلك النقطتين. ()

• (10) يعرف الجهد بصورة عامة عند اية نقطة واقعة في المجال الكهربائي بالمعادلة التالية: ()

•
$$\Phi = \frac{W \text{ (joule)}}{q_0 \text{ (meter)}}$$

• (11) اذا كانت حركة الشحنة على مسار مغلق فإن الشغل المنجز يساوي صفراً. ()

• (12) ان المجال الكهربائي المستقر هو مجالاً غير محافظاً. ()

• (13) تستخدم معادلة لابلاس لحساب الجهد في المناطق الخالية من الشحنات. ()

• مثال (1): عرف الجهد الكهربائي وما هي النقطتين التي يجب التأكيد عليهما؟

• الحل:

• يعرف الجهد الكهربائي عند اي نقطة بأنه الشغل لوحدة الشحنة الواجب انجازه لنقل شحنة موجبة اختبارية صغيرة من المالانهاية الى تلك النقطة.

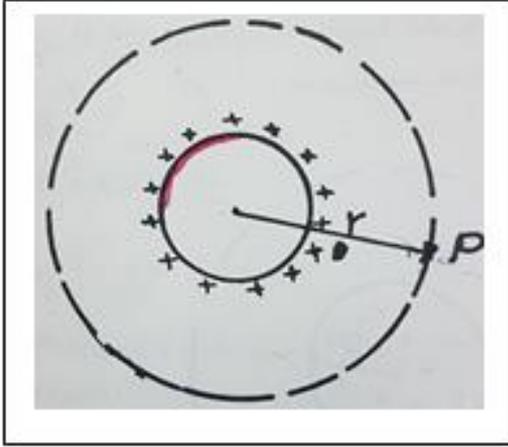
• مع التاكيد على نقطتين:

• اولاً : ان تكون الشحنة الاختبارية صغيرة بحيث يكون تحريكها من نقطة لآخرى لا يغير من المجال الكهربائي الاصلى.

• ثانياً : اختيار نقطة مرجع يتفق على قيمة الجهد عندها مسبقاً. وفي تعريفنا للجهد اخترنا النقطة المالانهاية واعتبرنا الجهد عندها صفراً. ففي كثير من مسائل الدوائر الكهربائية يتخذ جهد الارض مرجعاً لقياس الجهد ويعتبر جهدها مساوياً للصفر.

- مثال (2): كرة مشحونة بشحنة مقدارها Q استعمل قانون كاوس لايجاد المجال الكهربائي E في اي نقطة خارج الكرة.

الحل:



- نرسم سطح كاوس على شكل كرة وهمية نصف قطرها
- هو بعد النقطة P عن مركز الكرة وكما في الشكل المجاور.

- $$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- $$\int E \cos\theta da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- وبسبب التناظر الموجود في المسألة نجد ان اتجاه E يكون عموديا على السطح الكاوسي وعليه فان:

- $$\cos\theta = 1$$

- $$\int E da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- وبما ان Q بأكملها هي داخل السطح الكاوسي وتبعد بابعاد متساوية عن مركز السطح الكاوسي لذلك فان شدة المجال الكهربائي E على هذا السطح ستكون متساوية وعليه فإن E يكون خارج علامة التكامل:

- $E \int da = \frac{Q}{\epsilon_0}$

- $E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$

- $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



شكراً جزيلاً