مشتقة معكوس الدوال المثلثية

Derivatives of the Inverse Trigonometric functions:

1- $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

2- $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(u)) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

3- $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}(u)) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

4- $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}(u)) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

5- $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}(u)) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

6- $\frac{d}{dx}(\csc^{-1}(u)) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال// برهن العلاقة (١)

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

let $y = \sin^{-1}(u) \Longrightarrow \sin(y) = u$

$\Longrightarrow \cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} \cdot \frac{du}{dx}$

$\because \sin(y) = u \Rightarrow \sin^2(y) = u^2 \Rightarrow 1 - \sin^2(y) = 1 - u^2$

$\Rightarrow \cos^2(y) = 1 - u^2 \Longrightarrow \sqrt{\cos^2(y)} = \sqrt{1-u^2}$

$\Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1-u^2}$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

أوجد/ جد $\frac{dy}{dx}$ اذا

$$1-\ y=\sin^{-1}(3x^2)$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\cdot 6x=\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

$$2-\ y=\tan^{-1}(3\tan(x))$$

$$y'=\frac{1}{1+(3\tan(x))^2}\cdot 3\sec^2(x)=\frac{3\sec^2(x)}{1+9\tan^2(x)}$$

$$3-\ y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

$$y'=\cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}+\sin^{-1}x+\cancel{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\sin^{-1}x$$

$$4-\sqrt{x^2-1}-\sec^{-1}x=y$$

$$\therefore y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$5-\ x\cos^{-1}2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}=y$$

$$y'=\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}+\cos^{-1}2x-\frac{-8x}{4\sqrt{1-4x^2}}=\cos^{-1}2x$$

اشتقاقات الدوال الأسية واللوغارتمية

$$1- \frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2- \frac{d}{dx}(\log_a(u)) = \frac{1}{u\ln(a)} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3- \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln(a) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4- \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

أمثلة// جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ما يأتي

$$1- y = \ln(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$$

$$2- y = \ln(\sin^{-1}(2x))$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sin^{-1}(2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{\sin^{-1}(2x)\sqrt{1-4x^2}}$$

$$3- y = (100)^{x^2+2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (100)^{x^2+2x} \cdot \ln(100) \cdot (2x+2)$$

$$4- y = e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = e^{\sin x} \cos(x)$$

ع/

5- $y = x\log_3 x$

$$\Rightarrow y' = \cancel{x}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{x}\ln(3)}\right)+\log_3 x$$

$$= \frac{1}{\ln(3)} + \log_3 x$$

6- $y = e^{\ln(x)+x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\ln(x)+x}\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right) = e^{\ln(x)+x}\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow e^{\ln(x)}\,e^{x}\left(\frac{1+x}{x}\right) = e^{x}\,\cancel{x}\left(\frac{1+x}{\cancel{x}}\right)$$

$$= e^{x}(1+x)$$

7- $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}\frac{x}{2}$

$$y' = \frac{2x}{x^2+4} - \left(\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{2x}{x^2+4}} - \cancel{\frac{2x}{4+x^2}} - \tan^{-1}\frac{x}{2} = -\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

8- $y = \log_5(x^2+5x)$

$$y' = \frac{2x+5}{(x^2+5x)\ln 5}$$

derivatives hyperbolic functions مشتقات الدوال الزائدية

1- $\frac{d}{dx}(\sinh(u)) = \cosh(u) \cdot \frac{du}{dx}$

2- $\frac{d}{dx}(\cosh(u)) = \sinh(u) \cdot \frac{du}{dx}$

3- $\frac{d}{dx}(\tanh(u)) = \operatorname{sech}^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$

4- $\frac{d}{dx}(\coth(u)) = -\operatorname{csch}^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$

5- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(u)) = -\operatorname{sech}(u)\tanh(u) \cdot \frac{du}{dx}$

6- $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(u)) = -\operatorname{csch}(u)\coth(u) \cdot \frac{du}{dx}$

* برهنة العلاقة 1

$$y = \sinh(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{u} \cdot \frac{du}{dx} + e^{-u}\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\frac{du}{dx} = \cosh(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

أمثلة // جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1- $y = \sinh^2(5x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sinh(5x) \cdot \cosh(5x) \cdot 5$$

$$= 10\sinh(5x)\cosh(5x)$$

2- $y = \tanh(x^3)\coth(x^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tanh(x^3)\left(-\operatorname{csch}^2(x^2)\right) \cdot (2x) +$$

$$\coth(x^2)\left(\operatorname{sech}^2(x^3)\right) \cdot (3x^2)$$

3- $y = \cosh(e^{2x})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}\sinh(e^{2x})$$

4- $y = \ln(\sinh(2x))$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh(2x)} \cdot \cosh(2x) \cdot (2)$$

$$= \frac{2\cosh(2x)}{\sinh(2x)} = 2\coth(2x)$$

٤٣

Inverse hyperbolic function مشتقة الدوال الزائدية العكسية

1- $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}(u)) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \cdot \frac{du}{dx}$

2- $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}(u)) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

3- $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}(u)) = \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

4- $\frac{d}{dx}(\coth^{-1}(u)) = \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dx}$ $|u|>1$

5- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}(u)) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

6- $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}(u)) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

* برهان العلاقة (1)

Let $y = \sinh^{-1}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u+\sqrt{u^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{u^2+1}}\right) \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{\cancel{u+\sqrt{u^2+1}}} \cdot \left(\frac{\cancel{u+\sqrt{u^2+1}}}{\sqrt{u^2+1}}\right) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \cdot \frac{du}{dx}$

ع٤

أمثلة // جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

1- $y = \tanh^{-1}(\cos(x))$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1-\cos^2(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{-\sin(x)}{1-\cos^2(x)}$$

$$= \frac{-\sin(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin(x)}$$

2- $y = \operatorname{sech}^{-1}(\sin(2x))$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin(2x)\sqrt{1-\sin^2(2x)}} \cdot (2\cos(2x))$$

$$= \frac{-2\cos(2x)}{\sin(2x)\sqrt{\cos^2(2x)}} = \frac{-2\cos(2x)}{\sin(2x)\cos(2x)}$$

$$= \frac{-2}{\sin(2x)}$$

3- $y = \cosh^{-1}(e^x)$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} \cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

4- $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos(x))$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos(x)\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (-\sin(x)) = \sec(x)$$

أمثلة/ ١- أوجد المشتقة الثانية للدالة

$$y = \sin x$$

$$y' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

٢- أوجد المشتقة الثالثة $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ اذا كانت

$$y = 6x^5$$

$$y' = \frac{d}{dx}(6x^5) = 5*6x^4 = 30x^4$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(30x^4) = 30*4x^3 = 120x^3$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(120x^3) = 120*3x^2 = 360x^2$$

٣- اذا كانت $y = e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}\ln(x) + \ln(x)\frac{d}{dx}e^{-x}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

٤- اذا كانت $y = e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

$$y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$$

ومنه ومن المثال السابق فان

$$y'' = -2e^{-x}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right]$$

٥- اذا كانت $y = \sin 3x + \cos 2x$

جد المشتقة الخامسة

$$y' = \cos(3x) * (3) - \sin(2x) * (2)$$

$$y'' = -3\sin(3x) * 3 - 2\cos(2x) * (2)$$

$$y''' = -9\cos(3x) * (3) + 4\sin(2x) * (2)$$

$$y'''' = 27\sin(3x) * 3 + 8\cos(2x) * (2)$$

$$y''''' = 81\cos(3x) * (3) - 16\sin(2x) * 2$$

قاعده لوبيتال L Hopitals rule

تستعمل هذه القاعده الاشتقاق بهدف إيجاد النهايات لصيغ غير محدده . تحمل هذه القاعده اسم الرياضي الفرنسي غيوم دي لوبيتال .

تستعمل هذه القاعده في حاله $\frac{0}{0}$ مثل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+3x}=\frac{0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

∴ نشتق البسط والمقام فنحصل على

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2x+3}=\frac{\cos(0)}{0+3}=\frac{1}{3}$$

وتستعمل هذه القاعده في حاله $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

∴ نشتق البسط والمقام

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$$

أحيانا نستعمل قاعده لوبيتال عده مرات للوصول الى النتيجه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{3x^2+10x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{6x+10}=\frac{-2}{5}$$

وقد يمكن أيجاد بعض النهايات التي لاتظهر بشكل نهايات كسور باستعمال هذه القاعده

$$\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\sqrt{1-1/x}}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\sqrt{1-h}}{h}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-h}}}{1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2-x}=\frac{1}{2}$$

أمثلة :-

١- جد $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$

عند التعويض بقيمة $x = \frac{\pi}{2}$ فأن النتيجة $\frac{0}{0}$

∴ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

٢- جد $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin \sqrt{x}}$

ايضاً نتيجة التعويض $\frac{0}{0}$ لذلك نستخدم القاعدة

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

٣- جد $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

النتيجة $\frac{0}{0}$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{0}{0}$$

مادامت النتيجة باقية $\frac{0}{0}$ نشتق مرة أخرى

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

ص/

٤- جد $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

عند التعويض تكون النتيجة $\frac{\infty}{\infty}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

٥- جد أن $\lim_{x\to 0} \log x^{x} = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \log x^{x} = \lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

٦- جد $\lim_{x\to 0} \frac{2+x+\sin x}{x^3+x-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2+x+\sin x}{x^3+x-\cos x} = \frac{2+0+\sin(0)}{0+0-\cos(0)}$$

$$= \frac{2}{-1} = -2$$

٧- جد $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

عند التعويض بقيمة $x=0$ فأن النتيجة $\frac{0}{0}$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{1} = \frac{1}{2}$

٨- جد $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x+x^2}$

الناتج $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0$

٩- جد $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$ الناتج $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{4x^3}{1} = 108$

١٠- جد $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ الناتج $\frac{\infty}{\infty}$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$

$= \frac{2}{\infty} = 0$

١١- جد $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ الناتج $0.\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$

$= \frac{2}{\infty} = 0$

١٢- جد $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc(x)-\frac{1}{x}\right)$ الناتج $\infty-\infty$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\csc(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin(x)}{x\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}$$

$$=\frac{0}{2}=0$$

* أيضاً نستعمل قاعدة لوبيتال للصيغ $(0^0, \infty^0, 1^\infty)$

١٣- جد $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$ الناتج 1^∞

$$\text{Let } y=(\cos(x))^{1/x^2}\Longrightarrow \ln y=\frac{1}{x^2}\ln\cos(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2(\cos(x)-x\sin(x))}=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\ln(y)=-\frac{1}{2}\Longrightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0}y\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}y\right)}=e^{-1/2}\Longrightarrow \lim_{x\to 0}y=e^{-1/2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1/2}$$