التفاضل

تعريف :- نقول عن الدالة f أنها قابلة للأشتقاق عند x_0 اذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0 , x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

وتسمى b مشتقة f عند x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$
ونقول عن f أنها قابلة للأشتقاق على مجال I اذا كانت قابلة للأشتقاق عند كل نقطة x_0 من I .

تعريف المشتقة :

اذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للأشتقاق على المجال I من R فأن المشتقة الأولى للدالة $y' = f'(x)$ معرفة كما يلي

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز للمشتقة بأحدى الرموز التالية

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } \frac{df}{dx} \text{ أو } \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \text{ أو } f'(x) \text{ أو } y'$$

ومنه فلأيجاد المشتقة الأولى بأستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية :-

١- نحسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ الى $f(x + \Delta x)$

٢- نحسب الفرق $f(x + \Delta x) - f(x)$

٣- نحسب متوسط التغير $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ بقسمة $f(x + \Delta x) - f(x)$ على Δx

٤- نجد المشتقة بحساب الغاية $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta x}$

ت

مثال / أوجد المشتقه الأولى بأستخدام التعريف

للداله $f(x) = 2x+5$

١- نحسب مقدار تغير الداله $f(x)$ الى $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)+5$$

٢- نحسب الفارق $f(x+\Delta x)-f(x)$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = 2(x+\Delta x)+5-(2x+5)$$
$$= \cancel{2x}+2\Delta x+\cancel{5}-\cancel{2x}-\cancel{5}$$
$$= 2\Delta x$$

٣- نحسب متوسط التغير $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بقسمه

$f(x+\Delta x)-f(x)$ على Δx

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

٤- وأخيراً نوجد المشتقه بحساب

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2$$

$$= 2$$

مثال / أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

الدالة $f(x) = x^2 + 2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2 - (x^2+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2) - (x^2+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مثال / أوجد المشتقة الأولى بإستخدام التعريف للدالة

$$f(x) = \sqrt{3x-7}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{3(x+\Delta x-7} + \sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3x} + 3\Delta x \cancel{-7} \cancel{-3x} \cancel{+7}}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

القوانين العامة للمشتقات

١- مشتقة الثابت صفر اي

$\frac{d}{dx}(c)=0$ حيث c ثابت c constant

$\frac{d}{dx}(5)=0$

مثال/ اذا كانت $y=7$ جد y'

$y'=0$

واذا كانت $y=-5$ جد y'

$y'=0$

٢- أشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة $y=f(x)=x^n$

فأن $y'=f'(x)=nx^{n-1}$

مثال/ اذا كانت $y=x^3$ فأن $y'=3x^2$

مثال/ اذا كانت $y=x^{-4}$ فأن $y'=-4x^{-4-1}$

$=-4x^{-5}$

ومنه فأن مشتقة $y=x$ تساوي العدد 1

أي $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x)=1$

٣- مشتقة الدالة $y=ax^n$ هو $y'=anx^{n-1}$

مثال/ اذا كانت $y=3x^6$ فأن

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3x^6)=3*6*x^{6-1}$

$=18x^5$

مثال/ أوجد مشتقة $y=5\sqrt[3]{x}$

$y=5\sqrt[3]{x}=5x^{1/3}$

$\therefore y'=5*1/3\, x^{(1/3)-1}=\frac{5}{3}x^{-2/3}$

٤- مشتقة مجموع أو فرق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$$

حيث $f_1, \dots, f_n(x)$ دوال قابلة للأشتقاق فإن

$$F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots + f_{n-1}'(x) + f_n'(x)$$

مثال/ لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

$$\therefore y' = -3 * 4x^{-3-1} - 5 * 2x^{2-1} + 7x^{1-1}$$

$$= -12x^{-4} - 10x + 7$$

٥- مشتقة حاصل ضرب دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) * f_2(x)$

حيث $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ دالتين قابلتين للأشتقاق فإن

$$F'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_2'(x) f_1(x)$$

مثال/ لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

$$F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$$

$$= 12x + 3 + 12x - 8 = 24x - 5$$

ع

٦- مشتقة قسمة دالتين

لتكن الداله $F(x)$ وكتبت بالشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق و $f_2(x) \neq 0$

فأن $F'(x) = \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_2'(x)\, f_1(x)}{(f_2(x))^2}$

مثال / أوجد مشتقة الداله $y = \frac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \frac{1}{2}$

لدينا

$$f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 8 * 7x^{7-1} = 56x^6$$

$$f_2(x) = 2x - 1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$$

$$\therefore F'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_2'(x) f_1(x)}{(f_2(x))^2}$$

$$= \frac{56x^6(2x-1) - 2 * 8x^7}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2} = \frac{112x^7 - 56x^6 - 16x^7}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{96x^7 - 56x^6}{(2x-1)^2} = \frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

٥٥

٧- مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$
فإن
$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

مثال/ أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

$$f(x)=2x^2+3x-2 \Rightarrow f'(x)=4x+3$$

$$\therefore y'=F'(x)=2*4(2x^2+3x-2)^{2-1}*(4x+3)$$
$$=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$$

٨- مشتقة مقلوب دالة

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للإشتقاق، $g(x)\neq 0$ و

$y=f(x)=\frac{1}{g(x)}$ فإن $y'=f'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال/ لتكن $g(x)=(2x-1)$ و $y=f(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{(2x-1)}$

فإن
$$y'=f'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}$$

٩- مشتقة الدوال المركبة

لتكن الدالة $Z=f(y)$ حيث $y=g(x)$ أي أن

$Z=f(g(x))$ فأن $$\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

وهذه تسمى قاعدة السلسلة

مثال / لتكن $Z=y^3+2y+4$ و $y=5x^2$ أي أن

$$Z=(5x^2)^3+2(5x^2)+4$$

$$\therefore \frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(3y^2+2)(10x)$$

$$=10x(3y^2+2)$$

نعوض عن $y=5x^2$ فيكون لدينا

$$\frac{dZ}{dx}=10x(3(5x^2)^2+2)$$

$$=10x(75x^4+2)$$

٢٧

أمثلة / جد $f'(x)$ للدوال التالية

1- $f(x) = x + \frac{1}{x^2} + 3$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

2- $f(x) = \sqrt{x^3 - 2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$f(x) = (x^3 - 2)^{1/2} + (x+1)^{-1/2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}(x^3-2)^{-1/2} * 3x^2 - \frac{1}{2}(x+1)^{-3/2} * 1$$

$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

3- $f(x) = (x^2+1)^3(x^3-1)^2$

$$f'(x) = (x^2+1)^3 * 2(x^3-1) * 3x^2 + (x^3-1)^2 * 3(x^2+1)^2 * 2x$$

$$= 6x^2(x^2+1)^3(x^3-1) + 6x(x^3-1)^2(x^2+1)^2$$

واجب / جد $f'(x)$

1- $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)^3$

2- $f(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x+1}}$

3- $f(x) = (x^2+1)^8$

4- $f(x) = (x+1)^2 * (x^2+1)^{-3}$