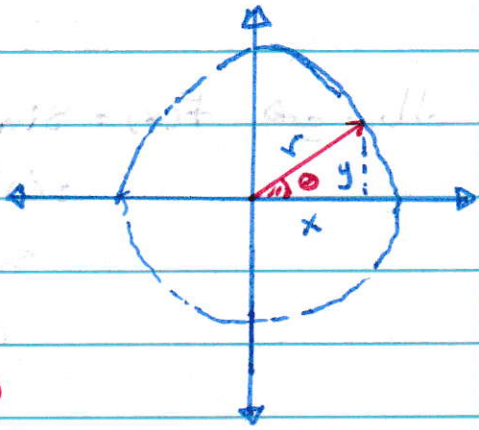
الدوال المثلثية :



1) $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$

2) $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$

3) $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta)}$

4) $\cot(\theta) = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

5) $\sec(\theta) = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$

6) $\csc(\theta) = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$

7) $\because\ x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

$\therefore\ \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

8) $\because\ x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + 1 = \dfrac{r^2}{y^2}$

$\therefore\ \cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$

9) $\because\ x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow 1 + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{r^2}{x^2}$

$\therefore\ 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

تعريف : يقال أن لدالة $f(x)$ دالة دورية من الفترة $p>0$ اذا كانت $f(x+p)=f(x)$ لكل قيم x .

مثال :- اذا كانت $f(x)=\cos(x)$ ، $f(x)=\sin(x)$ هي دوال دورية وكانت $p=2\pi$ فان :

$$\sin(\theta)=\sin(\theta+2\pi)$$

$$\cos(\theta)=\cos(\theta+2\pi)$$

بصورة عامة :-

$$\sin(\theta)=\sin(\theta+2n\pi) \quad ; \; n=\mp1, \mp2, \mp3, \ldots$$

$$\cos(\theta)=\cos(\theta+2n\pi) \quad ; \; n=\mp1, \mp2, \mp3, \ldots$$

ملاحظة :-

1) $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ دالة فردية

2) $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ دالة زوجية

3) $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ دالة فردية

4) $\cot(-\theta)=-\cot(\theta)$ دالة فردية

5) $\sec(-\theta)=\sec(\theta)$ دالة زوجية

6) $\csc(-\theta)=-\csc(\theta)$ دالة فردية

خواص الدوال المثلثية :

1) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$

2) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$

3) $\sin(x \mp y) = \sin(x)\cos(y) \mp \sin(y)\cos(x)$

4) $\cos(x \mp y) = \cos(x)\cos(y) \pm \sin(x)\sin(y)$

5) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

6) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

7) $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$; $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

8) $\tan(x \mp y) = \frac{\tan(x) \mp \tan(y)}{1 \pm \tan(x)\tan(y)}$

9) $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

10) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

11) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

مثال : اثبت ان $\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)\cot(\theta)} = 1$

الاثبات

$$\frac{\cos(\theta)}{\cancel{\sin(\theta)}\,\frac{\cos(\theta)}{\cancel{\sin(\theta)}}} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} = 1$$

مثال :- اثبت ان $\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} = \dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

نأخذ الطرف الايسر

نضرب بالمرافق

$$= \frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} \cdot \frac{1+\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}$$

$$= \frac{\cos(\theta)(1+\sin(\theta))}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cancel{\cos(\theta)}(1+\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

مثال : حل $\dfrac{2\cot(x)}{1+\cot^2(x)}$

الحل:

$$\frac{2\cot(x)}{1+\cot^2(x)} = \frac{2\cot(x)}{\csc^2(x)}$$

$$= \frac{2\,\frac{\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}}}{\frac{1}{\sin^2(x)}} = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$= \sin(2x)$$

1) $\dfrac{\tan^2(\theta)+1}{\sec(\theta)} = \sec(\theta)$

4) $\dfrac{\sec^2(\theta)-1}{\sec^2(\theta)} = \sin^2$ $\boxed{H.W}$

2) $\dfrac{\cos(\theta)+1}{\tan^2(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sec(\theta)-1}$

5)

3) $\dfrac{\tan(\theta)-\cot(\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)} = \sec^2(\theta) - \csc^2(\theta)$

تعريف : اذا حققت الدوال f و g الشرطان التاليان

① $x = g(f(x))$ لكل قيم x من منطلق الدالة f

② $x = f(g(x))$ لكل قيم x من منطلق الدالة g

هنا يقال ان الدالة f هي الدالة المعكوسة للدالة g و g هي الدالة المعكوسة للدالة f .

* معكوس الدوال المثلثية :

1) If $y = \sin(x) \Rightarrow x = \sin^{-1}(y)$ عندما $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$-1 \leq y \leq 1$

2) If $y = \cos(x) \Rightarrow x = \cos^{-1}(y)$ عندما $0 \leq x \leq \pi$

$-1 \leq y \leq 1$

3) If $y = \tan(x) \Rightarrow x = \tan^{-1}(y)$ عندما $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\forall y \in R$

4) If $y = \cot(x) \Rightarrow x = \cot^{-1}(y)$ عندما $0 < x < \pi$

$\forall y \in R$

5) If $y = \sec(x) \Rightarrow x = \sec^{-1}(y)$ عندما

$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

$|y| \geq 1$

6) If $y = \csc(x) \Rightarrow x = \csc^{-1}(y)$ عندما

$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \cup 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

$|y| \geq 1$

ملاحظة $\sin^{-1}(x) \neq (\sin(x))^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}$

مثال : $\sin(90) = 1 \Rightarrow \cancel{\sin^{-1}}(\cancel{\sin}(90)) = \sin^{-1}(1)$

$\therefore \sin^{-1}(1) = 90$

مثال ، جد $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل

Let $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sin(y) = \cancel{\sin}\left(\cancel{\sin^{-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ $\quad * \sin$

$\sin(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore y = \frac{\pi}{4}$

مثال : جد $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad * \sin$

$\sin(y) = \cancel{\sin}\left(\cancel{\sin^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$\sin(y) = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{\pi}{6}$

ملاحظة : مهم جداً $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

الاثبات :

Let $y = \sec^{-1}(x)$ $\quad * \sec$

$\sec(y) = \cancel{\sec}(\cancel{\sec^{-1}}(x))$

$\sec(y) = x$

$\therefore x = \dfrac{1}{\cos(y)} \Rightarrow \cos(y) = \dfrac{1}{x}$ $\quad * \cos^{-1}$

$= \cancel{\cos^{-1}}(\cancel{\cos}(y)) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

مثال : اثبت ان $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

الاثبات

$\sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(x)$

افرض $y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(x)$

$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - y$ $\quad * \cos$

$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$x = \sin(y) \Rightarrow y = \sin^{-1}(x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

مثال :- اثبت أن

$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$$

بأخذ الطرف الأيسر

$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = \frac{3\cos^2 x + 1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$\because \; 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$$\therefore \; \frac{3\cos^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 4 \; \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$$

حيث أن

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Exponential Functions الدوال الاسية

تعريف: الدالة التي تأخذ الصيغة التالية $f(x)=b^x$ حيث
$b>0$ و $b\neq 1$ تسمى بالدالة الاسية
للاساس b .

* منطلق هذه الدالة R
* مدى هذه الدالة $(0,\infty)$

مثال : $f(x)=2^x$; $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\pi^x$

* خصائص الدوال الاسية: Properties of Exponential functions

① $a^x * a^y = a^{x+y}$

② $\frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

⑥ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

⑦ $a^0 = 1$

⑧ $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$

⑨ $a^\infty = \infty$

⑩ $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

ملاحظة : الدالة $f(x)=e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية
حيث ان $e=2.7$

الدوال اللوغارتمية Logarithmic Functions

تعرف على انها معكوس الدوال الاسية ، $y = b^x$

والتي تكتب بالشكل التالي ، $x = \log_b y$ اذا

كانت $y > 0$ و x اي عدد حقيقي .

حيث ان ، مثلاً

دالة لوغارتمية ⟺ دالة اسية

$\log_2 8 = 3 \iff 8 = 2^3$

هناك اربعة ملاحظات مهمة في اللوغارتمات ،

① b يمثل اساس اللوغارتم

② اذا كان $b = 10$ فان $x = \log_{10} y$

يسمى اللوغارتم العشري

③ اذا كان $b = e$ فان

$x = \log_e y \Rightarrow x = \ln(y)$

ويسمى اللوغارتم الطبيعي .

④ ، منطلق الدالة اللوغارتمية هو $(0, \infty)$

ومدى الدالة اللوغارتمية هو R