الجمع الجبري للدوال

* الدوال التي لها نفس المنطلق Dom يمكن انه تجمع او تطرح او تضرب او تقسم.

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $f.g(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$
5. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$

والجمع الخطي يكتب بالشكل التالي

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

مثال: اذا كانت $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x - 3$ جد

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(f/g)(x)$.

ثم جد منطلق الدوال الثانية من $(f+g)(x)$ - $(f.g)(x)$ و $(f/g)(x)$

$(f.g)(x)$.

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3$
$= x - 2 + \sqrt{x-2}$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - x + 3$
$= 4 - x + \sqrt{x-2}$
3. $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) \cdot (x-3)$
$= x - 3 + (x-3)\sqrt{x-2}$
4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \Rightarrow$
$= \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x-3}$

$\therefore f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow x - 2 \geq 0$ لأن داخل الجذر

$x \geq 2$

$\therefore \text{Domain}_f [2, \infty)$

$\therefore g(x) = x - 3$

$\therefore \text{Domain}_g (-\infty, \infty)$

$\therefore D = D_f \cap D_g = [2, \infty) \cap (-\infty, \infty) = [2, \infty)$

$\therefore \text{Domain}(f+g, f-g, f.g) = D = [2, \infty)$

$\text{Domain}(f/g) = [2, 3) \cup (3, \infty)$.

مثال : لنفرض الدالتين

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\leq 0\\ x & x>0\end{cases} \quad \text{and} \quad g(x)=\begin{cases}-2x & x<1\\ 1-x & x\geq 1\end{cases}$$

جد حاصل جمع وطرح وضرب الدالتين

الحل: نقسم المنطلق لكلا الدالتين بنفس الفترات

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\leq 0\\ x & 0<x<1\\ x & x\geq 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}-2x & x\leq 0\\ -2x & 0<x<1\\ 1-x & x\geq 1\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}1-2x-x^2 & x\leq 0\\ -x & 0<x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}1+2x-x^2 & x\leq 0\\ 3x & 0<x<1\\ -1+2x & x\geq 1\end{cases}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}-2x+2x^3 & x\leq 0\\ -2x^2 & 0<x<1\\ x-x^2 & x\geq 1\end{cases}$$

الدوال المركبة (تركيب لدوال)

تركيب لدوال f و g يعرف بالشكل التالي $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
ويرمز له بالرمز $f \circ g$ ويقرأ (f بعد g) حيث

مثال: اذا كانت $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = x^2 - x$
جد $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$.

الحل:

① $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - x)$
$= 2(x^2 - x) + 1$
$= 2x^2 - 2x + 1$

② $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1)$
$= (2x + 1)^2 - (2x + 1)$

مثال: اذا كانت $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ جد
$(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$.

① $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2+3})$
$= \sqrt{\sqrt{x^2+3} - 3}$

② $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(\sqrt{x-3}) = \sqrt{(\sqrt{x-3})^2 + 3}$
$= \sqrt{x - 3 + 3} = \sqrt{x}$

مثال :- اذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=x+2$ ، $h(x)=(x^2+1)^2$

جد $(fogoh)(x)$

الحل :

$$(fogoh)(x) = f(goh) = f(g(h(x)))$$

$$= f(g(x^2+1)^2)$$

$$= f((x^2+1)^2+2)$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2+2}$$

مثال H.W.

① $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$ ، $g(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ ، $(fog)(x)$

② $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{1-x}$ ، $fog(x)$

③ جد دالة $f(x)$ ، $g(x)$ اذا علمت ان $(fog)(x)=F(x)=(x+1)^5$

④

Graph of a functions رسم الدوال

الدالة f تحتوي على مجموعة من الازواج المرتبة (x, y).
رسم هذه الازواج $(x, f(x))$ في نظام الاحداثي يمثل رسم الدالة.

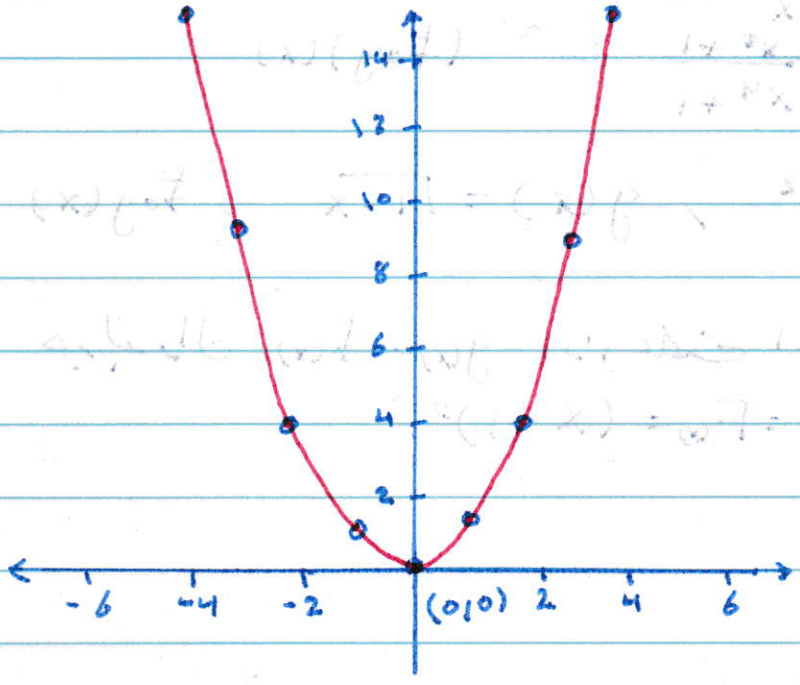
مثال: ارسم الدالة التالية: $f(x) = x^2$

الحل

$Domain_f = R$

* يعني ان مجال الدالة كل الاعداد الحقيقية.
* نعمل جدول لقيم x ضمن المجال.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16



مثال: ارسم الدالة التالية $f(x) = \sqrt{4 - x}$

الحل: * نجد منطلق الدالة

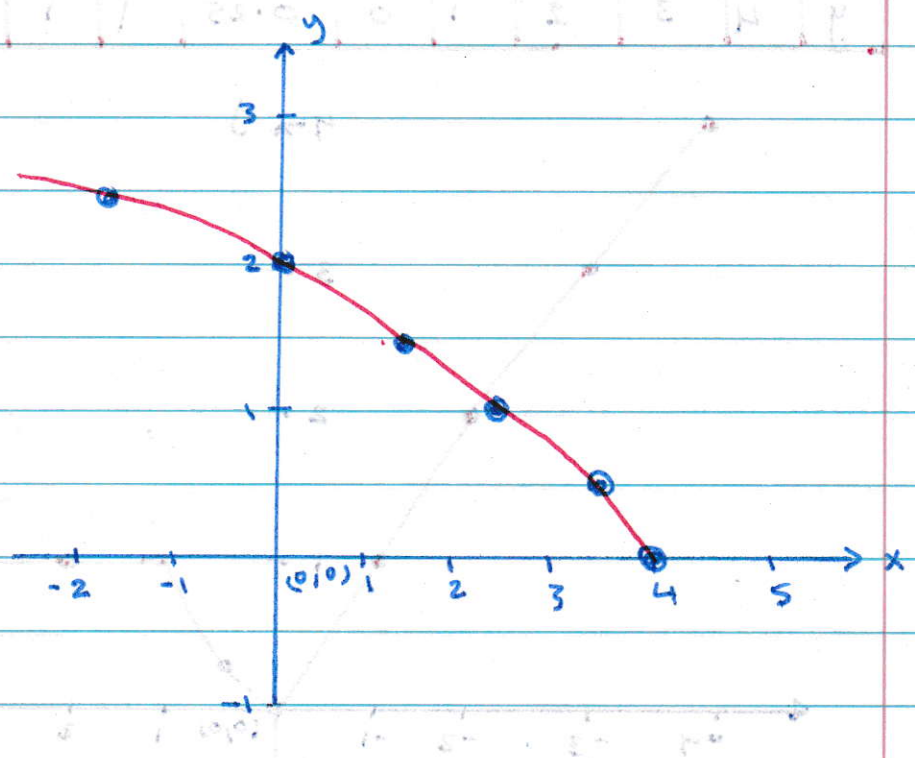
$4 - X \geq 0$

$4 \geq X \Rightarrow X \leq 4$

$\therefore$ Domain $(-\infty, 4]$

* نعمل جدول لقيم x ضمن المنطلق

X	4	3.75	3	2	0	-2
y	0	0.5	1	1.4	2	2.4



مثال : ارسم الدالة

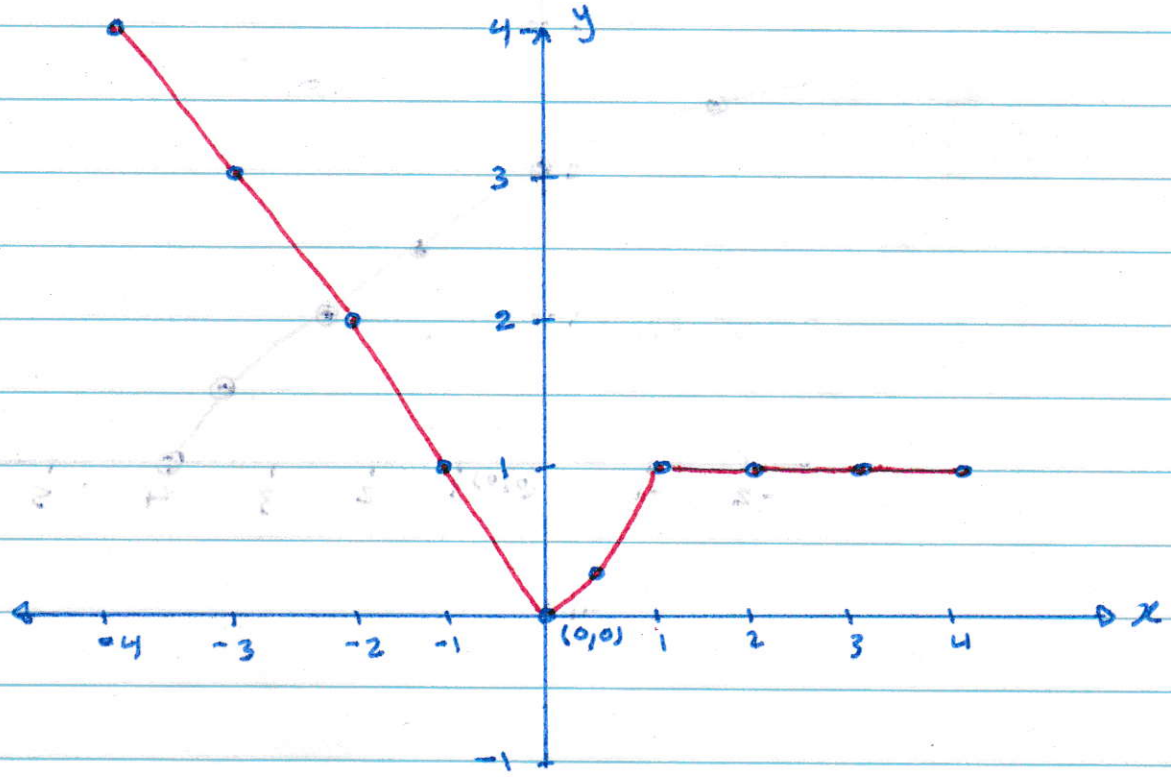
$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

الحل : نجد اولاً منطلق الدالة

واضح من خلال فترات الدالة أنها منطلقها هو كل R

نعمل جدول للقيم يتكون من قيم x التي تقع ضمن المنطلق Domain.

x	-4	-3	-2	-1	0	0.5	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	0.25	1	1	1	1



معكوس الدالة : Inverse function

ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$

أي أن $f(f^{-1}(x)) = x$ لكل قيم x بمجال الدالة f

مثال: جد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x) = x^3$

الحل: نضع القاعدة $f(f^{-1}(x)) = x$

نعوض بدل كل x في الدالة بـ $f^{-1}(x)$ نجد

$$f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^3 = x$$

$$\therefore (f^{-1}(x))^3 = x$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

مثال: جد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x) = 3x - 5$

الحل:

$$f(f^{-1}(x)) = 3f^{-1}(x) - 5 = x$$

$$= 3f^{-1}(x) = x + 5$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

مثال: جد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x) = (1-x^3)^{\frac{1}{5}} + 2$

الحل

$$f(f^{-1}(x)) = (1-(f^{-1}(x))^3)^{\frac{1}{5}} + 2 = x$$

$$= (1-(f^{-1}(x))^3)^{\frac{1}{5}} = x-2$$

$$= 1-(f^{-1}(x))^3 = (x-2)^5$$

$$= -(f^{-1}(x))^3 = (x-2)^5 - 1 \qquad \times -1$$

$$(f^{-1}(x))^3 = 1-(x-2)^5$$

يأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$f^{-1}(x) = (1-(x-2)^5)^{\frac{1}{3}}$$

مثال: H.W. جد $f^{-1}(x)$ للدالة

$$f(x) = \frac{2x+5}{3x-1}$$