

م. نادية علي عايد

قسم الاحصاء – جامعة البصرة

التوزيع الطبيعي

NORMAL DISTRIBUTION

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث يلعب دوراً أساسياً في عملية المعاينة Sampling ، كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية مثل التغيرات الطبيعية التي تحدث للإنسان والحيوان والعوامل البيئية بشكل عام . والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة والطول والوزن والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار .

وبدراسة شكل منحنى التوزيع الطبيعي نجد أنه منحنى متمائل حول الوسط الحسابي للتوزيع ، ويأخذ الشكل الجرسى وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقى شيئاً فشيئاً دون أن يتماسا مع هذا المحور . وإذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى على المحور الأفقى فإن هذا العمود يعتبر محوراً للتمائل لأنه يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين تماماً وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة كل قسم تساوى %50 من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابى والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية .

وحيث أن التوزيع الطبيعي يعبر عن متغيرات عشوائية متصلة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع له لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى الذى يتبعه لقيمة معينة حيث أن هذا الاحتمال يساوى صفرأ . ولكن يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى أقل من قيمة معينة أو أكثر من قيمة معينة أو تقع قيمته بين قيمتين معلومتين.

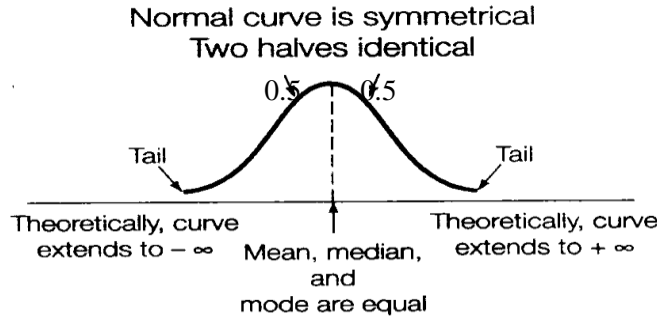
وترجع أهمية التوزيع الطبيعي إلى الأسباب الآتية :

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف العديد من المتغيرات العشوائية في الواقع العملي مثل الأطوال والأوزان لمجموعة من الأشخاص ، درجات الطلاب في امتحان مقرر معين ، أخطاء القياس الناتجة من تجربة ما ، حيث تتوزع القياسات المشاهدة (التكرارات) بشكل متماثل حول قيمة مركزية هي قيمة متوسط التوزيع وتقل هذه القياسات تدريجيا كلما ابتعدنا عن هذه القيمة إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار ، حيث يأخذ منحنى التوزيع الشكل الجرسى .
2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريبا مفيدا للعديد من التوزيعات المتقطعة وغير المتقطعة مثل توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون وغيرها .
3. يعتبر التوزيع الطبيعي حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي حيث تتوزع معالم المجتمع المقدر من العينة مثل المتوسط مثلا كالتوزيع الطبيعي وهذا ما سوف تناوله في معرض حديثنا عن نظرية النهاية المركزية .

خصائص التوزيع الطبيعي

يتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص الآتية إجمالاً :

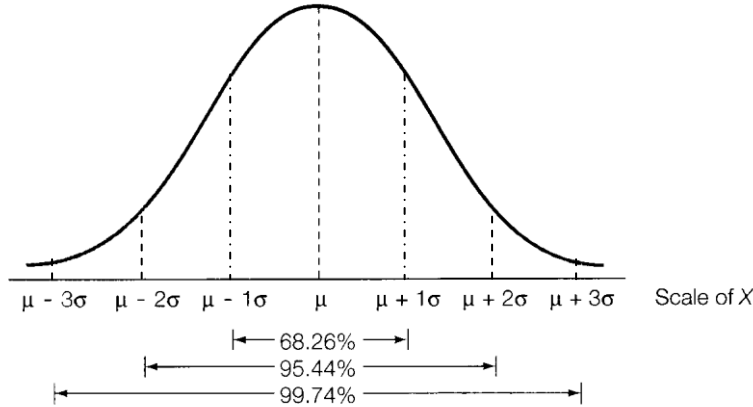
1. منحنى التوزيع الطبيعي منحنى متمائل حول متوسط التوزيع والذي يرمز له بالرمز μ .
2. المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي متساوية القيمة .
3. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوى الوحدة المربعة وهذه المساحة تعبر عن مجموع الاحتمالات . وكما ذكرنا أن الخط الرأسى الساقط من قمة المنحنى على المحور الأفقى عند المتوسط يقسم المساحة إلى نصفين متساويين 50% من المساحة الكلية على يمين الخط العمودى ، 50 % من المساحة الكلية على يساره .



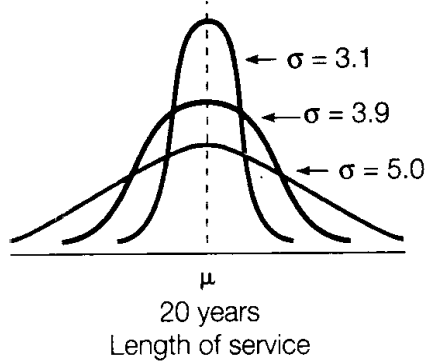
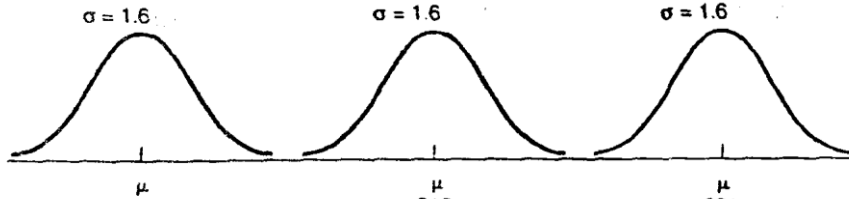
4. إذا أسقطنا عمودين على بعد انحراف معياري واحد إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التي يحصرها هذين العمودين تمثل 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . كذلك نجد أن المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 2 انحراف معياري على جانبي متوسط التوزيع تمثل 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 3 انحرافات معيارية على جانبي متوسط التوزيع فتمثل 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عما سبق رمزيا كالآتي :

$$p (\mu - 1\sigma < x < \mu + 1 \sigma) = 0.6826$$

$$p (\mu - 2\sigma < x < \mu + 2 \sigma) = 0.9544$$



5. التوزيع الطبيعي ليس توزيعاً وحيداً ولكنه يمثل عائلة من التوزيعات الطبيعية ، وكل توزيع من هذه العائلة يمكن تحديده وتعريفه بدقة متى عرفت معالمه وهي المتوسط ويرمز له بالرمز μ ، والانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ ، حيث تحدد قيمتي هاتين المعلمتين شكل منحنى التوزيع ، حيث تحدد قيمة المتوسط μ موقع التوزيع على المحور الأفقي من نقطة الأصل ، كما تحدد قيمة الانحراف المعياري مدى تشتت التوزيع فكلما كانت σ كبيرة كلما زاد تشتت القيم وبالتالي اتساع المنحنى .



دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى بالعلاقة :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < X < \infty$$

$$, \quad -\infty < \mu < \infty \quad , \quad \sigma > 0$$

وحيث أن استخدام هذه الدالة لحساب الاحتمالات المختلفة تكتنفه صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بعلم التكامل ، علاوة على أنه كما ذكرنا يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين μ ، σ فإنه لحسن الحظ يمكن تحويل أى توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي عياري له جداول خاصة تعرف باسم جداول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي العياري متى علم متوسطه وانحرافه المعياري .

التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر ، وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وتسمى Z أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أى منحنى توزيع طبيعى وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعى العيارى . هذا وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z الشكل الآتى :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad , -\infty < Z < \infty$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن الدالة لا تعتمد على معالم مجهولة القيمة وبالتالي فقد استخدمت فى حساب جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعى العيارى المشار إليه بعاليه .

خصائص المنحنى الطبيعى المعيارى

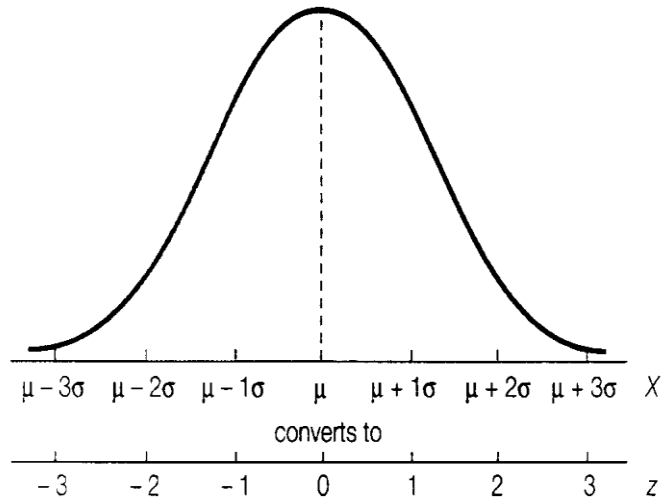
1. المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودى الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوى 0.5
2. منحنى التوزيع الطبيعى العيارى متماثل حول متوسطه ، وبالتالي فإن التواءه يساوى صفر وتقاطعه يساوى 3 .
3. المساحة المحصورة بين 1 \pm درجة معيارية تساوى 68.26 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . والمساحة المحصورة بين 2 \pm درجة معيارية تساوى 95.44 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة المحصورة بين 3 \pm درجات معيارية تساوى 99.74 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كالاتى :

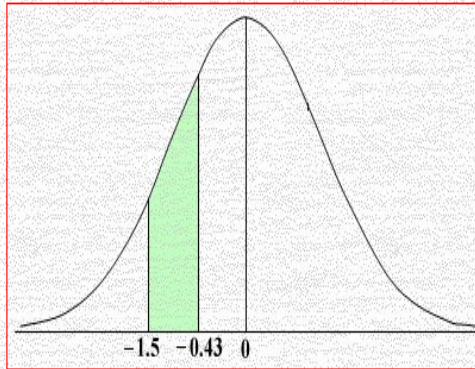
180

$$P (-1 < Z < 1) = 0.6826$$

$$P (-2 < Z < 2) = 0.9544$$

$$P ((-3 < Z < 3) = 0.9974$$





$$= 0.2668$$

$$\begin{aligned} P(-0.43 > Z > -1.5) &= [1 - P(Z < 0.43)] - [1 - P(Z < 1.5)] \\ &= (1 - 0.6664) - (1 - 0.9332) \\ &= 0.3336 - 0.0668 \end{aligned}$$

احسب المساحة بين $Z = -1.5$, $Z = -0.43$

الحل:

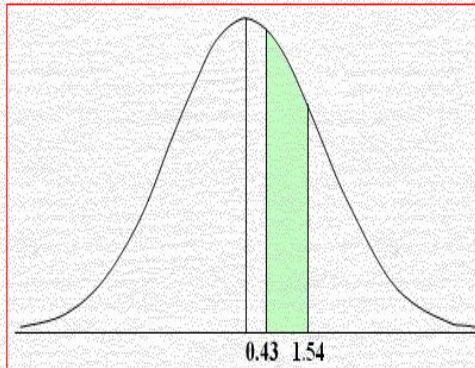
المساحة المطلوبة = المساحة على يسار -0.43 مطروحاً منها المساحة على يسار -1.5

$$(0.9332 - 1) - (0.6664 - 1) =$$

$$0.0668 - 0.3336 =$$

$$0.2668 =$$

أو



$$\begin{aligned} P(0.43 < Z < 1.5) &= P(Z < 1.5) - P(Z < 0.43) \\ &= 0.9332 - 0.6664 \\ &= 0.2668 \end{aligned}$$

احسب المساحة بين $Z = 1.5$, $Z = 0.43$

الحل:

المساحة المطلوبة = المساحة على يسار 1.5 مطروحاً منها المساحة على يسار 0.43

$$0.6664 - 0.9332 =$$

$$0.2668 =$$

أو

إذا كان Z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

- a) $P(z < 0.95)$ b) $P(z \geq 0.71)$ c) $P(1.45 \leq z \leq 3.26)$
 d) $P(z < -0.12)$ e) $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$ f) $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

a) $p(z < 0.95) = 0.82894$

b) $p(z > 0.71) = 1 - p(z < 0.71)$
 $= 1 - 0.76115$
 $= 0.23885$

f) $p(1.45 < z < 0.69)$
 $= p(z < 0.69) - p(z < -2.26)$
 $= 0.75490 - 0.01191$
 $= 0.74299$

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -1.9 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| -1.8 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 |
| -1.7 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 |
| -1.6 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 |
| -1.5 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 |
| -1.4 | 0.0034 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 |
| -1.3 | 0.0048 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0042 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 |
| -1.2 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0050 |
| -1.1 | 0.0097 | 0.0094 | 0.0090 | 0.0087 | 0.0084 | 0.0082 | 0.0079 | 0.0076 | 0.0074 | 0.0071 |
| -1.0 | 0.0135 | 0.0131 | 0.0128 | 0.0124 | 0.0121 | 0.0118 | 0.0114 | 0.0111 | 0.0107 | 0.0104 |
| -0.9 | 0.0181 | 0.0176 | 0.0172 | 0.0168 | 0.0164 | 0.0160 | 0.0156 | 0.0152 | 0.0148 | 0.0144 |
| -0.8 | 0.0237 | 0.0231 | 0.0226 | 0.0221 | 0.0216 | 0.0211 | 0.0206 | 0.0201 | 0.0196 | 0.0191 |
| -0.7 | 0.0304 | 0.0297 | 0.0291 | 0.0284 | 0.0278 | 0.0271 | 0.0264 | 0.0257 | 0.0250 | 0.0243 |
| -0.6 | 0.0381 | 0.0373 | 0.0365 | 0.0357 | 0.0349 | 0.0341 | 0.0332 | 0.0324 | 0.0315 | 0.0307 |
| -0.5 | 0.0469 | 0.0459 | 0.0449 | 0.0439 | 0.0429 | 0.0418 | 0.0407 | 0.0396 | 0.0385 | 0.0374 |
| -0.4 | 0.0568 | 0.0557 | 0.0545 | 0.0533 | 0.0521 | 0.0508 | 0.0495 | 0.0482 | 0.0469 | 0.0456 |
| -0.3 | 0.0677 | 0.0664 | 0.0650 | 0.0636 | 0.0621 | 0.0606 | 0.0590 | 0.0574 | 0.0558 | 0.0541 |
| -0.2 | 0.0796 | 0.0781 | 0.0765 | 0.0749 | 0.0732 | 0.0714 | 0.0696 | 0.0677 | 0.0658 | 0.0639 |
| -0.1 | 0.0930 | 0.0913 | 0.0895 | 0.0877 | 0.0858 | 0.0838 | 0.0817 | 0.0796 | 0.0774 | 0.0752 |
| 0.0 | 0.1080 | 0.1064 | 0.1047 | 0.1029 | 0.1010 | 0.0990 | 0.0969 | 0.0947 | 0.0924 | 0.0901 |
| 0.1 | 0.1243 | 0.1225 | 0.1206 | 0.1187 | 0.1167 | 0.1146 | 0.1124 | 0.1101 | 0.1078 | 0.1054 |
| 0.2 | 0.1418 | 0.1398 | 0.1377 | 0.1355 | 0.1332 | 0.1309 | 0.1285 | 0.1261 | 0.1236 | 0.1211 |
| 0.3 | 0.1604 | 0.1582 | 0.1559 | 0.1535 | 0.1511 | 0.1486 | 0.1461 | 0.1435 | 0.1409 | 0.1383 |
| 0.4 | 0.1801 | 0.1777 | 0.1752 | 0.1726 | 0.1699 | 0.1671 | 0.1643 | 0.1614 | 0.1585 | 0.1556 |
| 0.5 | 0.1995 | 0.1969 | 0.1942 | 0.1914 | 0.1885 | 0.1855 | 0.1825 | 0.1794 | 0.1763 | 0.1732 |
| 0.6 | 0.2197 | 0.2169 | 0.2140 | 0.2110 | 0.2079 | 0.2047 | 0.2014 | 0.1980 | 0.1946 | 0.1911 |
| 0.7 | 0.2406 | 0.2375 | 0.2343 | 0.2310 | 0.2276 | 0.2241 | 0.2205 | 0.2168 | 0.2130 | 0.2092 |
| 0.8 | 0.2620 | 0.2587 | 0.2553 | 0.2518 | 0.2481 | 0.2443 | 0.2404 | 0.2364 | 0.2323 | 0.2281 |
| 0.9 | 0.2838 | 0.2803 | 0.2767 | 0.2729 | 0.2690 | 0.2649 | 0.2607 | 0.2564 | 0.2520 | 0.2476 |
| 1.0 | 0.3059 | 0.3022 | 0.2983 | 0.2943 | 0.2901 | 0.2857 | 0.2812 | 0.2766 | 0.2719 | 0.2672 |
| 1.1 | 0.3281 | 0.3241 | 0.3199 | 0.3155 | 0.3110 | 0.3063 | 0.3015 | 0.2966 | 0.2916 | 0.2865 |
| 1.2 | 0.3503 | 0.3460 | 0.3415 | 0.3368 | 0.3319 | 0.3268 | 0.3215 | 0.3161 | 0.3106 | 0.3050 |
| 1.3 | 0.3745 | 0.3700 | 0.3653 | 0.3603 | 0.3551 | 0.3497 | 0.3441 | 0.3383 | 0.3324 | 0.3264 |
| 1.4 | 0.3995 | 0.3948 | 0.3898 | 0.3846 | 0.3791 | 0.3734 | 0.3675 | 0.3614 | 0.3551 | 0.3487 |
| 1.5 | 0.4253 | 0.4203 | 0.4150 | 0.4094 | 0.4035 | 0.3973 | 0.3908 | 0.3841 | 0.3772 | 0.3702 |
| 1.6 | 0.4518 | 0.4465 | 0.4409 | 0.4348 | 0.4284 | 0.4216 | 0.4145 | 0.4071 | 0.3995 | 0.3918 |
| 1.7 | 0.4790 | 0.4734 | 0.4675 | 0.4612 | 0.4545 | 0.4474 | 0.4399 | 0.4321 | 0.4241 | 0.4159 |
| 1.8 | 0.5068 | 0.5009 | 0.4947 | 0.4881 | 0.4811 | 0.4737 | 0.4659 | 0.4577 | 0.4492 | 0.4405 |
| 1.9 | 0.5398 | 0.5336 | 0.5271 | 0.5202 | 0.5129 | 0.5052 | 0.4969 | 0.4881 | 0.4789 | 0.4694 |
| 2.0 | 0.5748 | 0.5683 | 0.5614 | 0.5541 | 0.5464 | 0.5382 | 0.5295 | 0.5203 | 0.5107 | 0.5008 |
| 2.1 | 0.6116 | 0.6048 | 0.5976 | 0.5900 | 0.5819 | 0.5733 | 0.5642 | 0.5546 | 0.5445 | 0.5340 |
| 2.2 | 0.6501 | 0.6430 | 0.6356 | 0.6278 | 0.6195 | 0.6107 | 0.6014 | 0.5916 | 0.5813 | 0.5706 |
| 2.3 | 0.6902 | 0.6828 | 0.6751 | 0.6669 | 0.6582 | 0.6490 | 0.6392 | 0.6289 | 0.6181 | 0.6068 |
| 2.4 | 0.7318 | 0.7241 | 0.7161 | 0.7077 | 0.6988 | 0.6894 | 0.6795 | 0.6691 | 0.6582 | 0.6468 |
| 2.5 | 0.7748 | 0.7668 | 0.7584 | 0.7496 | 0.7403 | 0.7305 | 0.7202 | 0.7094 | 0.6981 | 0.6864 |
| 2.6 | 0.8191 | 0.8108 | 0.8021 | 0.7929 | 0.7832 | 0.7729 | 0.7621 | 0.7508 | 0.7390 | 0.7268 |
| 2.7 | 0.8646 | 0.8560 | 0.8470 | 0.8375 | 0.8275 | 0.8170 | 0.8060 | 0.7945 | 0.7825 | 0.7701 |
| 2.8 | 0.9112 | 0.9023 | 0.8930 | 0.8833 | 0.8731 | 0.8624 | 0.8512 | 0.8395 | 0.8273 | 0.8146 |
| 2.9 | 0.9587 | 0.9494 | 0.9397 | 0.9295 | 0.9188 | 0.9075 | 0.8957 | 0.8834 | 0.8706 | 0.8573 |
| 3.0 | 0.9960 | 0.9863 | 0.9762 | 0.9656 | 0.9545 | 0.9428 | 0.9304 | 0.9174 | 0.9038 | 0.8896 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9891 | 0.9788 | 0.9680 | 0.9567 | 0.9448 | 0.9322 | 0.9189 | 0.9050 | 0.8905 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9893 | 0.9789 | 0.9680 | 0.9566 | 0.9446 | 0.9319 | 0.9185 | 0.9045 | 0.8899 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9894 | 0.9789 | 0.9679 | 0.9564 | 0.9443 | 0.9315 | 0.9179 | 0.9037 | 0.8890 |
| 3.4 | 0.9996 | 0.9895 | 0.9789 | 0.9678 | 0.9562 | 0.9440 | 0.9311 | 0.9174 | 0.9031 | 0.8883 |
| 3.5 | 0.9997 | 0.9896 | 0.9789 | 0.9677 | 0.9560 | 0.9437 | 0.9307 | 0.9169 | 0.9024 | 0.8875 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9897 | 0.9789 | 0.9676 | 0.9558 | 0.9434 | 0.9303 | 0.9164 | 0.9018 | 0.8868 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9898 | 0.9789 | 0.9675 | 0.9556 | 0.9431 | 0.9299 | 0.9159 | 0.9012 | 0.8861 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9899 | 0.9789 | 0.9674 | 0.9554 | 0.9428 | 0.9295 | 0.9154 | 0.9006 | 0.8854 |
| 3.9 | 0.9999 | 0.9899 | 0.9789 | 0.9673 | 0.9552 | 0.9425 | 0.9291 | 0.9149 | 0.9000 | 0.8847 |

إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من 1000 شخص تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 172 سم

وانحراف معياري 5 سم فأوجدني :

$$n = 1000$$

$$\bar{x} = 172 \text{ cm}$$

$$\sigma = 5 \text{ cm}$$

(1) عدد الأشخاص الذين يقع طول كل منهم بين 170 سم ، 175 سم ؟

(2) النسبة المئوية لعدد الأشخاص الذين يكون طول كل منهم يقل عن أو يساوي 168 سم ؟

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \rightarrow$$

$$z_1 = \frac{(175 - 172)}{5} = 0.6$$

$$z_2 = \frac{(170 - 172)}{5} = -0.4$$



لمساواة من المنحنى: $0.1554 + 0.2387$

$$0.3811 =$$

عدد الأشخاص = 0.3811×1000

$$= 381.1 \approx 381$$

إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من 1000 شخص تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 172 سم

وانحراف معياري 5 سم فأوجدني :

$$n = 1000$$

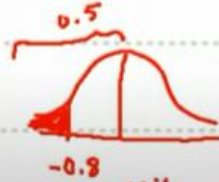
$$\bar{x} = 172 \text{ cm}$$

$$\sigma = 5 \text{ cm}$$

(1) عدد الأشخاص الذين يقع طول كل منهم بين 170 سم ، 175 سم ؟

(2) النسبة المئوية لعدد الأشخاص الذين يكون طول كل منهم يقل عن أو يساوي 168 سم ؟

$$z = \frac{(168 - 172)}{5} = -0.8$$



المساحة المطلوبة:

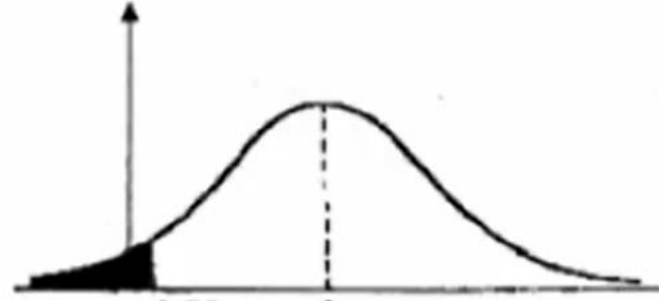
$$0.5 - 0.2881 = 0.2119$$

-0.8

النسبة المئوية لعدد الأشخاص هي: $0.2119 \times 100\% = 21.19\%$

$$P(X < 64.25) = P(Z < -0.75) :$$

$$= 0.50 - 0.2734 = 0.2266$$



مثال (1)

إذا كان العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة والمنتج بمعرفة إحدى شركات الكمبيوتر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 ساعة وانحراف معيارى 100 ساعة . فإذا تم اختيار وحدة مشغل من إنتاج هذه الشركة بطريقة عشوائية ، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضى :

1. بين 1000 ، 1150 ساعة .

2. أقل من 930 ساعة .
3. أكبر من 780 ساعة .
4. بين 700 ، 1200 ساعة .
5. بين 750 ، 850 ساعة .

الحل :

نفرض أن المتغير العشوائى X يعبر عن العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة ، أى أن :

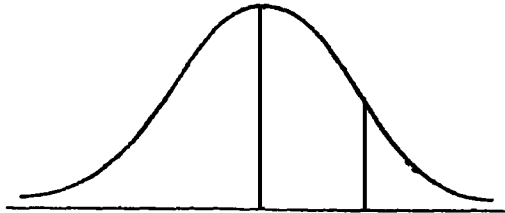
المتوسط $\mu = 1000$ ساعة

الانحراف المعياري $\sigma = 100$ ساعة

1. احتمال أن يكون العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة بين 1000 ، 1150 ساعة

$$P(1000 \leq X \leq 1150) = P\left(\frac{1000-1000}{100} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1150-1000}{100}\right)$$

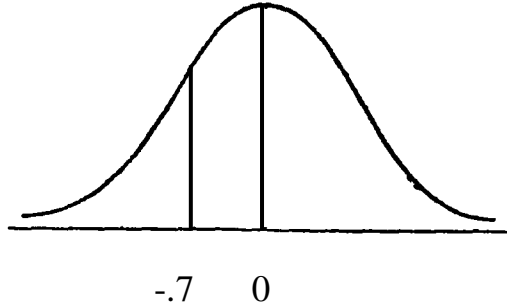
$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$$



0 1.5

02 احتمال أن يكون العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة أقل من 930 ساعة

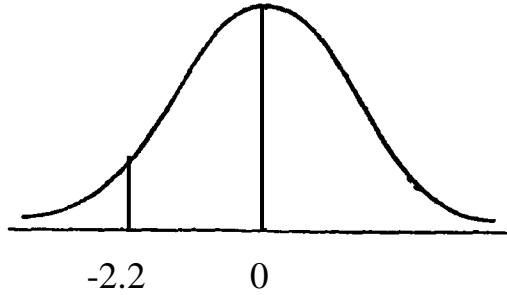
$$\begin{aligned} P(X < 930) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{930 - 1000}{100}\right) = P\left(Z < \frac{-70}{100}\right) \\ &= P(Z < -0.7) = 0.5 - 0.2580 = 0.2420 \end{aligned}$$



3. احتمال أن يكون العمر الافتراضى لمشغل الأقراص المرنة أكبر من 780 ساعة

$$P(X > 780) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{780 - 1000}{100}\right) = P\left(Z > \frac{-220}{100}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P(Z > -2.2) = 0.5 + P(-2.2 < Z < 0) \\
&= 0.5 + P(0 < Z < 2.2) \\
&= 0.5 + 0.4861 = 0.9861
\end{aligned}$$

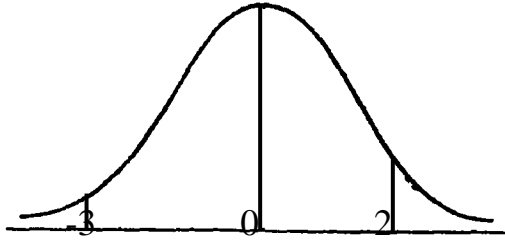


4. احتمال أن يكون العمور الافتراضى لمشغىل الأقمشة راص المرنة بين 700 ، 1200 ساعة

$$\begin{aligned}
p(700 \leq X \leq 1200) &= P\left(\frac{700-1000}{100} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1200-1000}{100}\right) \\
&= P\left(\frac{-300}{100} \leq Z \leq \frac{200}{100}\right) = P(-3 \leq Z \leq 2)
\end{aligned}$$

189

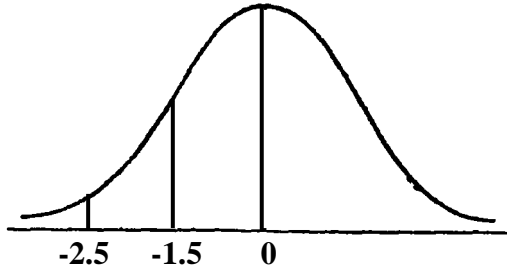
$$\begin{aligned} &= P(-3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4987 + 0.4772 = 0.9759 \end{aligned}$$



5. احتمال أن يكون العمود الافتراضي لمشي لغل الأقفال المرنة بين 750 ، 850 ساعة

$$P(750 \leq X \leq 850) = P\left(\frac{750 - 1000}{100} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{850 - 1000}{100}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{-250}{100} \leq Z \leq \frac{-150}{100}\right) \\
&= P(-2.50 \leq Z \leq -1.50) \\
&= P(-2.50 \leq Z \leq 0) - P(-1.50 \leq Z \leq 0) \\
&= P(0 \leq Z \leq 2.50) - P(0 \leq Z \leq 1.50) \\
&= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606
\end{aligned}$$



التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين

يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط الآتية :

1. حجم العينة يكون كبيراً ($n \geq 30$)
2. المتوسط يكون أكبر من أو يساوي 5 ($\mu = np \geq 5$)
3. التباين يكون أكبر من أو يساوي 5 ($\sigma^2 = np(1-p) \geq 5$)

مثال (2)

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة المنتجة بواسطة إحدى الآلات هي 15% ، فإذا تم اختيار عينة حجمها 150 وحدة بطريقة عشوائية من إنتاج هذه الآلة . فاحسب احتمال أن تحتوى هذه العينة على :

1. أقل من 20 وحدة معيبة .
2. 20 وحدة معيبة على الأقل .
3. ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة .
4. أكثر من 18 وحدة معيبة .
5. أكثر من 28 وحدة معيبة .

الحل :

نلاحظ أن شروط استخدام التوزيع الطبيعية كتقريب لتوزيع ذى الحدين متوفرة حيث أن :

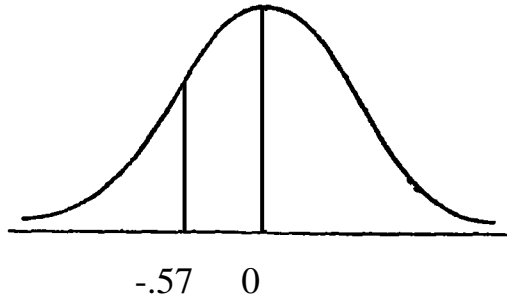
1. $n = 150 > 30$
2. $\mu = np = 150 \times 0.15 = 22.5 > 5$
3. $\sigma^2 = np(1-p) = 150 \times 0.15 \times 0.85 = 19.125 > 5$

وعلى فرض أن المتغير العشوائى X يعبر عن عدد الوحدات المعيبة فإن الاحتمالات المطلوبة يمكن حسابها كالاتى :

1. احتمال أن تحتوى العينة على أقل من 20 وحدة معيبة

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - 22.5}{4.4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= p\left(Z < \frac{-2.5}{4.4}\right) \\
 &= p(Z < -0.57) \\
 &= 0.5 - p(-0.57 < Z < 0) \\
 &= 0.5 - P(0 < Z < 0.57) \\
 &= 0.5 - 0.2157 = 0.2843
 \end{aligned}$$

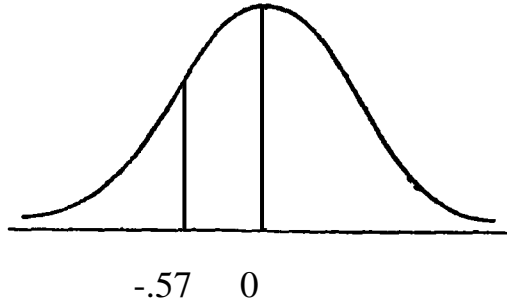


2. احتمال أن تحتوى العينة على 20 وحدة معيبة على الأقل

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 20) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{20 - 22.5}{4.4}\right) \\
 &= p(Z \geq -0.57) = 0.5 + p(-0.57 \leq Z \leq 0)
 \end{aligned}$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.57)$$

$$= 0.5 + 0.2157 = 0.7157$$



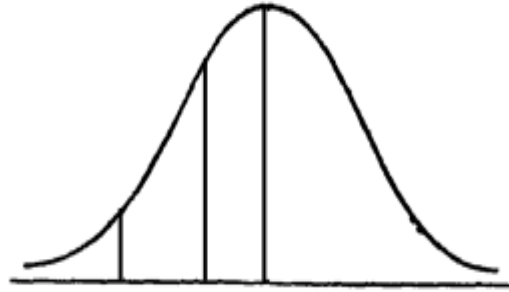
3. احتمال أن تحتوى العينة على ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة

$$P(15 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{15 - 22.5}{4.4} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{20 - 22.5}{4.4}\right)$$

$$= P(-1.71 \leq Z \leq 0) - p(-0.57 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(-1.71 \leq Z \leq -0.57) = P(0 \leq Z \leq 1.71) - P(0 \leq Z \leq 0.57)$$

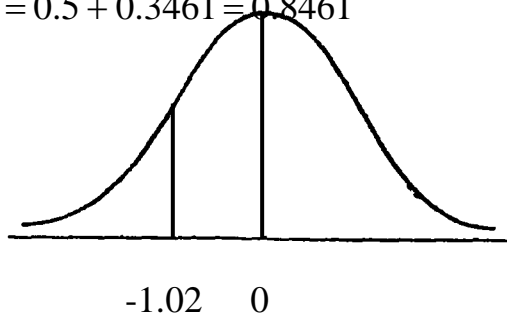
$$= 0.4564 - 0.2157 = 0.2407$$



4. احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 18 وحدة معيبة

$$P(X > 18) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{18 - 22.5}{4.4}\right)$$

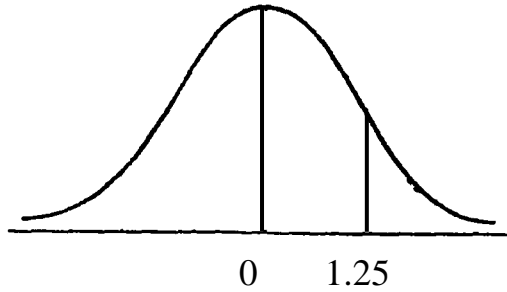
$$\begin{aligned}
 &= P\left(Z > \frac{-4.5}{4.4}\right) = P(Z > -1.02) \\
 &= 0.5 + P(-1.02 < Z < 0) \\
 &= 0.5 + P(0 < Z < 1.02) \\
 &= 0.5 + 0.3461 = 0.8461
 \end{aligned}$$



5. احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 28 وحدة معيبة

$$P(X > 28) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{28 - 22.5}{4.4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(Z > \frac{5.5}{4.4}\right) = P(Z > 1.25) \\
 &= 0.5 - P(0 < Z < 1.25) \\
 &= 0.5 - 0.3944 = 0.1056
 \end{aligned}$$



نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem

إذا سحبنا عدة عينات من الحجم n بطريقة عشوائية من مجتمع متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فإن توزيع المعاينة للمتوسطات يتوزع تقريبا كالتوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، وغالبا ما يسمى الانحراف المعياري

للمعاينة باسم الخطأ المعياري Standard Error وبالتالي فإن المقدار $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يتوزع كالتوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح .

مثال (3)

إذا كان الزمن اللازم لأداء خدمة معينة للعملاء بأحد البنوك يتوزع كالتوزيع الطبيعي بمتوسط 25 ثانية وانحراف معياري 4 ثواني . فإذا تم سحب عينة عشوائية من 25 شخص يقومون بأداء هذه المهمة ، فاحسب احتمال أن يكون متوسط الزمن اللازم لأداء هذه الخدمة البنكية :

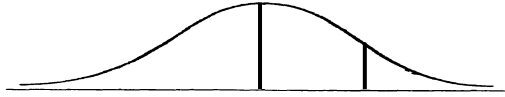
1. 26 ثانية أو أكثر .
2. بين 24 ، 27 ثانية .
3. 26 ثانية أو أقل .
4. 23 ثانية على الأقل .

الحل : $n = 25$ $\sigma = 5$ $\mu = 25$

1. احتمال أن يكون متوسط الزمن اللازم لأداء الخدمة 26 ثانية أو أكثر

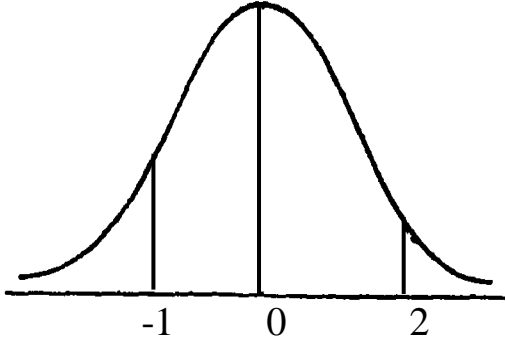
$$P(\bar{X} \geq 26) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{26 - 25}{5/\sqrt{25}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z \geq 1) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587
 \end{aligned}$$



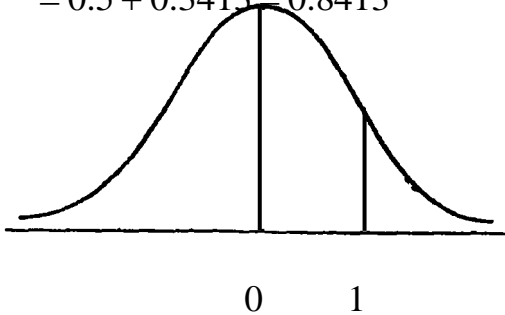
2. احتمال أن يكون متوسط الزمن اللازم لأداء الخدمة ما بين 24 , 27 ثانية

$$\begin{aligned}
 P(24 < \bar{X} < 27) &= P\left(\frac{24 - 25}{5/\sqrt{25}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{27 - 25}{5/\sqrt{25}}\right) \\
 &= P(-1 < Z < 2) \\
 &= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) \\
 &= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 2) \\
 &= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 2) \\
 &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8180
 \end{aligned}$$



3. احتمال أن يكـون متوسط الزمن اللازم لأداء الخدمة 26 ثانية أو أقل

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \leq 26) &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{26 - 25}{5/\sqrt{25}}\right) \\
 &= P(Z \leq 1) \\
 &= 0.5 + p(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413
 \end{aligned}$$



4. احتمال أن يكون متوسط الزمن اللازم لأداء الخدمة 23 ثانية على الأقل

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 23) &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{23 - 25}{5/\sqrt{25}}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = 0.5 + P(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$

