اعداد م. نادية علي عايد الاثنين 11 |2021\1\

توزيع بواسون Poisson distribution

توزيع بواسون يُعنَى بالمتغير المنفصل الذي يمثل عدد النجاحات في وحدة الزمن أو الفترة المكانية ويمكن أن تكون وحدة الزمن هنا ثانية، دقيقة، ساعة أو يوماً إلى غير ذلك. أما وحدة الفترة المكانية فيمكن أن تكون وحدة طول، مساحة، حجم، أو غير ذلك.

ويعرف هذا التوزيع بتوزيع الحوادث النادرة، حيث أنه يصلح للحوادث نادرة الحدوث مثل عدد حوادث سقوط الطائرات وعدد وصول رسائل بالخطأ لبريد المدينة. ويمثل هذا التوزيع حالة خاصة من توزيع ذي الحدين وذلك عندما يكون احتمال النجاح صغيراً جداً مقابل عدد تكرارات كبير جداً.

توجد امثلة كثيرة يمكن استخدامها كتطبيقات لتوزيع بواسون

- عدد السمك الذي يصطاد في منطقة محددة في اليوم الواحد.
- عدد حوادث السيارات على طريق معين في الأسبوع.
- عدد الرسائل المفقودة في مكتب بريد في اليوم.

ولكي تكون تجربة عشوائية هي تجربة بواسون لا بد أن تحقق ما يلي:

1- معدل عدد النجاحات التي تحدث في الفترة المحددة ثابت ومعلوم. وسنعبر عن ذلك المعدل بالرمز λ، ولاحظ هنا أن عدد النجاحات يعني عدد مرات حدوث الظاهرة التي نحن بصدد دراستها في الفترة المحددة .

2− احتمال حدوث نجاح واحد في فترة صغيرة جداً يتناسب مع طول تلك الفترة.

3− إذا اعتبرنا عدد فترات منفصلة عن بعضها البعض فإن حدوث النجاحات في أي فترة مستقل عن حدوث النجاحات في أي فترة أخرى.

بفرض X هو متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات النجاح في فترة زمانية أو مكانية محددة وكان معدل عدد النجاحات يساوي λ ، فنقول أن X يتبع توزيع بواسون بِمَعْلَمَة λ ونعبر عن ذلك بكتابة:

$$X \sim \mathbf{PO}(\lambda)$$

إذا كان اقتران الكتلة الاحتمالي للمتغير العشوائي يعطى بالعلاقة:

لا تنسَ **اقتران الكتلة الاحتمالي لتوزيع بواسون:**

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots \dots \dots$$

حيث x تمثل عدد النجاحات في الفترة المحددة.

ويكون توقع المتغير العشوائي X وتباينه :

لا تنسَ **توقع وتباين المتغير العشوائي لتوزيع بواسون على الترتيب:**

$$E(X) = \lambda$$
$$\sigma_X^2 = \lambda$$

مثـال : إذا كان X متغيراً عشوائياً بحيث $X \sim \mathrm{PO}(4)$ ، احسب:

1) $P(X > 1)$
2) توقع وتباين المتغير العشوائي.

الحل/

1) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يعطى بالعلاقة:

$$P(x) = \frac{e^{-4}4^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2, \dots \dots \dots.$$

وبالتالي:

$$P(X > 1) = \mathbf{1} - P(X \leq 1) = 1 - \left\{\frac{e^{-4}4^{0}}{0!} + \frac{e^{-4}4^{1}}{1!}\right\} = 0.91$$

2) التوقع والتباين للمتغير العشوائي:

$$E(X) = \sigma^{2} = 4$$

مثـال : إذا كان متوسط عدد الأيام التي تمطر فيها في شهر شباط هي ثلاثة أيام في الأسبوع. فما احتمال أن تمطر خمسة أيام في الأسبوع في ذلك الشهر؟ وأوجد التوقع والتباين.

الحل/

لاحظ أن التوزيع هو توزيع بواسون حيث الفترة المحددة هي زمنية ومقدارها أسبوع وأُعطي المعدل بمقدار 3 أيام أسبوعياً وبالتالي تكون $\lambda=3$ ، و بفرض أن X هو متغير عشوائي يعبر عن عدد الأيام الماطرة في الأسبوع فيكون:

$$\boldsymbol{X \sim \mathrm{PO}(3)}$$

ويكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يعطى بالعلاقة:

$$P(x) = \frac{e^{-3}3^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,3, \dots \dots \dots \dots ....$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$P(5) = \frac{e^{-3}3^{5}}{5!} = \frac{(0.05)(243)}{120} = 0.101$$

ويكون التوقع والتباين للمتغير العشوائي:

$$E(X) = \sigma^{2} = 3$$

واجب

إذا كان معدل حوادث السيارات على طريق معين هو 10 حوادث في الأسبوع. ما احتمال عدم حدوث أي حادث على ذلك الطريق في أسبوع معين؟ ما احتمال حدوث 6 حوادث في أسبوع معين؟