توزيع ذو الحدين   اعداد ست نادية علي عايد

توزيعات احتمالية خاصة Special probability distributions

التوزيعات الاحتمالية الخاصة هي عبارة عن توزيعات احتمالية لها قاعدة معروفة، وهي تنتج عن تجارب عشوائية لوحظ أنها تأخذ نمطاً معيناً في تغيرها مما مَكَّن المختصين من التوصل إلى صيغ رياضية تصف تغيرات نتائج تلك التجارب العشوائية.

وسنتحدث عن توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون كأمثلة على المتغير العشوائي المنفصل وعن التوزيع الطبيعي كمثال على المتغير العشوائي المتصل، حيث سنعرف التوزيعات الاحتمالية لها ونذكر بعض خواصها.

توزيع ذي الحدين Binomial distribution

في كثير من التجارب العشوائية تكون نتيجة التجربة أحد أمرين، إما نجاح وإما فشل. وتتكرر هذه التجارب عدة مرات بحيث تكون نتيجة كل إجراء للتجربة مستقلة عن نتيجة أي إجراء آخر. فمثلاً عند رمي قطعة نقود عدة مرات فإن النتيجة تكون إما ظهور صورة أو كتابة، وتكون نتيجة أي رمية مستقلة عن نتيجة أي رمية أخرى، فإذا كانت نتيجة الرمية الأولى ظهور الصورة لأعلى، فإن ذلك لا يؤثر في نتيجة الرمية الثانية وهكذا. إن مثل هذه التجربة تسمى تجربة ذي الحدين.

وبصورة عامة كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى تجربة ذي الحدين:

1- تتألف التجربة من عدد معين من المحاولات وليكن n .

2- نتيجة كل محاولة أحد ناتجين، نسمي أحدهما نجاحاً والآخر فشلاً.

3- نتيجة كل محاولة مستقل عن نتيجة أي محاولة أخرى.

4- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت و ليكن p.

بفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات النجاح في تجربة ذي، وكان احتمال النجاح $\mathbf{p}$ وكان $\mathbf{n}$ عدد مرات تكرار التجربة، فنقول أن X يتبع توزيع ذي الحدين ونعبر عن ذلك بكتابة:

$$\boldsymbol{X \sim \mathrm{b}(\mathrm{n}, \mathrm{p})}$$

إذا كان اقتران الكتلة الاحتمالي له يعطى بالعلاقة:

اقتران الكتلة الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين

$$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{n}{x} \mathrm{p}^{x}(1 - \mathrm{p})^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n}$$

حيث:

$\boldsymbol{x}$ تمثل عدد مرات النجاح و

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

وتسمى **p** و **n** بمعلمتي التوزيع .

ونحصل على توقع وتباين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذي الحدين من العلاقتين التاليتين:

لا تنسَ

توقع وتباين المتغير العشوائي لتوزيع ذي الحدين على الترتيب:

$$E(X) = n\mathrm{p}$$

$$\sigma^2 = n\mathrm{p}(1-\mathrm{p})$$

مثــال [redacted]: إذا كان X متغيراً عشوائياً بحيث $X \sim b(4,0.2)$ أوجد ما يلي:

1) $p(x)$
2) $p(2)$
3) $P(X \geq 1)$
4) التوقع والتباين للمتغير العشوائي.

الحل/ من الواضح أن $n = 4, \; p = 0.2$ وبالتالي:

$$1) \; P(x) = \binom{4}{x}(0.2)^x(0.8)^{4-x}, \qquad x = 0,1,2,3,4$$

ويمكن التعبير عن اقتران الكتلة الاحتمالي بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

وتكون الاحتمالات المطلوبة كما يلي:

$$2) \; P(2) = \binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2 = 0.1536$$

$$3) \; P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

4) $P(X \leq 8) = P(0) + P(1) + \cdots + P(8)$

$$= 1 - P(x > 8)$$

$$= 1 - [P(9) + P(10)]$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{9}(0.9)^9(0.1)^1 + \binom{10}{10}(0.9)^{10}(0.1)^0\right] = 0.2639$$

5)$\mathrm{E(X)} = \mathrm{np} = 10 \times 0.9 = 9$

6)$\sigma^2 = n\mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = 10 \times 0.9 \times 0.1 = 0.9$

مثـال : رميت قطعة نقود متزنة أربع مرات. جد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة في هذه التجربة، وأوجد احتمال عدم الحصول على أي صورة. ثم احسب توقع وتباين المتغير العشوائي.

الحل/ لاحظ هنا أن التجربة هي تجربة ذات الحدين حيث $n = 4$ و $\mathrm{p} = 0.5$ وبفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن عدد الصور التي تظهر فيكون:

$$X \sim \mathrm{b}(4,0.5)$$

ويكون اقتران الكتلة الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$P(x) = \binom{4}{x}(0.5)^x(0.5)^{4-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4$$

واحتمال عدم الحصول على أي صورة:

$$P(0) = \binom{4}{0}(0.5)^0(0.5)^4 = 0.0625$$

أما توقع وتباين المتغير العشوائي:

$$E(X) = n\mathrm{p} = 4 \times 0.5 = 2$$

$$\sigma^2 = n\mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = 4 \times 0.5 \times 0.5 = 1$$

واجب بيتي:

إذا كان $X\sim b(4,0.3)$ احسب ما يلي:

- توقع وتباين X.
- $P(0 < X \leq 3)$

تفخر شركة أن نسبة المعيب 0.01 من انتاجها اليومي الذي يبلغ 25 قطعة. أوجد ما يلي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$ الذي يعبر عن عدد القطع المعيبة.
- توقع وتباين المتغير العشوائي.
- $P(X > 8)$

معدل عدد حوادث السيارات على طريق صحراوي 5 في الشهر. ما احتمال عدم حدوث أي حادث على ذلك الطريق في شهر معين؟ ما احتمال حدوث 4 حوادث أو أقل في شهر معين؟