7- مبدأ التقابل ونظرية ايرنفست correspondence principle and Ehren fests theorem

ينص مبدأ التقابل والذي وضعه بور سنة 1923 لربط المفاهيم الكميه مع الفيزياء الكلاسيكيه:

(قوانين الفيزياء الكميه يجب ان تتطابق في غايتها الكلاسيكيه مع القوانين الكلاسيكيه حيثما تصح الاخيره مع النتائج التطبيقيه)

هذا النص يضع اطار يحدد النظريه الكميه ولكن لا يعني هذا ان القوانين الكيه نابعه من قوانين كلاسيكيه ومن الامثله الواضحه على هذا المبدأ هي نظرية ايرنفست وتنص هذه النظريه على ان:

اذا كان تغير الطاقه الكامنه غير محسوس او مهملا بالنسبه لامتداد الحزمه الموجيه في الفضاء فان حركة مركز الحزمه تشابه حركة جسيم كلاسيكي.

البرهان:

لتكن سرعة الحزمه الموجيه معرفة بانها المعدل الزمني للقيمه المتوقعه لموقع الجسيم

$$<V> = \frac{d}{dt} <x> \qquad (14\text{-}4)$$

$$= \frac{d}{dt} \int \Psi^* \; x \; \Psi \; dx$$

$$= \int \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} x \Psi$$

هنا x متغير لا يعتمد على الزمن

نعوض عن $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ و $\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$ من معادلة شرودنجر المعتمده على الزمن

$$<V> = -\frac{i}{\hbar}\left[\int \Psi^* x \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U\Psi\right) dx + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi^*}{dx^2} + U\Psi^*\right) x\Psi dx\right]$$

$$<V> = \frac{i\hbar}{2m}\int \left[\Psi^* x \frac{d^2\Psi}{dx^2} - \left(\frac{d^2\Psi^*}{dx^2}\right) x\Psi\right] dx \qquad (15\text{-}4)$$

التكامل الثاني يمكن تبسيطه بالتجزئه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2\Psi^*}{dx^2}\right)x\Psi dx = x\Psi\left(\frac{d\Psi^*}{dx}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int\left(\frac{d\Psi^*}{dx}\right)\frac{d}{dx}(x\Psi)dx$$

من خواص الداله الموجيه انها تتلاشى في النهايات لذلك فان $\left(\frac{d\Psi^*}{dx}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ يساوي صفر وسنطبق الان التكامل بالتجزئه على الحد الثاني من الطرف الايمن من المعادله الاخيره

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\Psi^*}{dx}\right)\frac{d}{dx}(x\Psi)dx = -\left[\Psi^*\frac{d(x\Psi)}{dx}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{d^2(x\Psi)}{dx^2}dx$$

وايضا فان الحد الاول يساوي صفر عند النهايات

وعليه فان
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2\Psi^*}{dx^2}\right)x\Psi dx = \int\Psi^*\frac{d^2(x\Psi)}{dx^2}$$

وعليه تكون المعادله (4-15) كالتالي

$$<V> = \frac{i\hbar}{2m}\int\Psi^*\left[x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2(x\Psi)}{dx^2}\right]dx$$

$$<V> = -\frac{i\hbar}{m}\int\Psi^*\frac{d\Psi}{dx}dx = \frac{<p_x>}{m} \qquad (16\text{-}4)$$

وهذه تنطبق تماما مع الادله الكلاسيكيه $V = \frac{P_x}{m}$

اي ان حركة الحزمه الموجيه حينما يكون صغيرا جدا بالنسبه للوسط المحيط به تشبه حركة جسيم كلاسيكي وهو اثبات لنص نظرية ايرنفست.

سؤال: اثبت صحة العلاقه $\frac{d}{dt}<p_x> = <-\frac{\partial U}{\partial x}>$ ؟

وفي مايلي بعض الصيغ الخاصه بالمؤثرات الكميه:

مؤثر الموقع $\hat{x}$

مؤثر الزخم (مؤثر الاندفاع) $\hat{P}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$

المؤثر الهاملتوني $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$

المؤثر الهاملتوني للجسيم الحر $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

مؤثر الطاقه الحركيه $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

مؤثر الطاقه الكليه $\hat{E} = i\hbar\frac{d}{dt}$

متباينة شوارتز Schwartz inequality

لو تصورنا متجهين V_1 و V_2 في الفضاء الثلاثي فمن السهوله اثبات العلاقة التاليه

$$\left((V_1 \cdot V_1)(V_2 \cdot V_2) \geq (V_1 \cdot V_2)^2\right.$$

اما في فضاء هلبرت فالمتجهات تمثل دوال حالة ، والضرب العددي يمثل تكامل على كل المتغيرات المتمثله في دالة الحاله اي ان

$$\int f_1^* \cdot f_1 dr \int f_2^* \cdot f_2 dr \geq \left|\int f_1^* f_2 dr^2\right|$$

$$\int |f_1|^2 dr \int |f_2|^2 dr \geq \left|\int f_1^* f_2 dr\right|^2 \qquad (17\text{-}4)$$

لنعرف الداله $f_1 = (\hat{A} - < A >)\Psi$ اذ ان $\hat{A}$ اي مؤثر وكذلك نعرف

$$f_2 = (\hat{B} - < \hat{B} >)\Psi$$

لذلك $\sigma_A^2 = < f_1 | f_1 >$ وان $\sigma_B^2 = < f_2 | f_2 >$ نعوض في العلاقه (4-17)

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left|\int f_1^* f_2 dr\right|^2$$

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left|\int \Psi^* (\hat{A} - < A >)(\hat{B} - < B >)\Psi dr\right|^2$$

$$\geq \left|\int \Psi^* \left(\hat{A}\hat{B} - < A > \hat{B} - < B > \hat{A} + < A > < B >\right)\Psi dr\right|^2$$

$$\geq \left|\begin{array}{l}\int \Psi^* \left[\frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) - < A > \hat{B} - < B > \hat{A} + < A > < B >\right]\Psi dr \\ + \frac{1}{2}\int \Psi^* (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\Psi dr\end{array}\right|^2$$

في الطرف الايمن من المعادله الاخيره تكون الكميه المحصوره بين القوسين الكبيرهمؤثرا هرميتيا . ولنفرض ان هذا المؤثر هو $\hat{F}$ وقيمته الذاتيه $< F >$ عليه نحصل على:

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left| < F > + \frac{1}{2} < \left[\hat{A}, B\right] > \right|^2$$

أذ ان $<F>$ مقدار حقيقي قد يكون صفرا للداله Ψ . فلو كان كل من $\hat{A}$ و $\hat{B}$ يحقق العلاقه $\left|\hat{A},\hat{B}\right|=i\hbar$ مثل مؤثرات الموقع والزخم في هذه الحاله فان

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq <F>^2 + \frac{\hbar^2}{4}$$

اي ان

$$\sigma_A\sigma_B \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (18\text{-}4)$$

وهذه ادنى لادقه مهما كان شكل الداله Ψ ونستنتج ان ضرب اللادقه يكون في ادنى حالاته عندما لا تتحقق خاصية التبادل للمؤثرات وهذا يصح لاي زوج من المؤثرات

$$\sigma_A\sigma_B \geq \frac{1}{2i} < \left[\hat{A},\hat{B}\right] > \qquad (19\text{-}4)$$

يمكن ان نبرهن علاقة اللاتحديد(4-19) بصورة اكثر عموميه

لاي مؤثر $\hat{A}$ لدينا لدينا علاقة الانحراف المعياري والتي يمكن كتابتها كالتالي

$$\sigma_A^2 = <(\hat{A} - <A>)^2 = <\Psi|(\hat{A}-a)^2\Psi = <(\hat{A}-a)\Psi|(\hat{A}-a)\Psi>$$

اذا عرفنا مؤثر اخر $f \equiv (\hat{A} - <A>)\Psi$ يصبح لدينا

$$\sigma_A^2 = <f|f>$$

كذلك يمكن تعريف $g \equiv (\hat{B} - <B>)\Psi$ وبالتالي

$$\sigma_B^2 = <g|g>$$

وبالاستفاده من علاقة اللامساواة لشوارتز (4-17) نحصل على

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = <f|f><g|g> \geq |<f|g>|^2$$

الان ولاي رقم عقدي z فان القيمه المطلقه

$$|z|^2 = [real(z)]^2 + [\mathrm{Im}ag.(z)]^2 \geq [\mathrm{Im}ag.(z)]^2 = \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2$$

ولنجعل $z = <f|g>$

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}[<f|g> - <g|f>]\right)^2$$

ولكنب

$$\ldots B>)\Psi> \quad \ldots \Psi|\hat{B}\Psi> + <A><B><\Psi|\Psi> \quad \ldots A><B>$$

وبالمثل

$$<g|f> = <\hat{B}\hat{A}> - <A><B>$$

عليه

$$<f|g> - <g|f> = <\hat{A}\hat{B}> - <\hat{B}\hat{A}>$$
$$= <[\hat{A}, \hat{B}]$$

أذ ان

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

وعليه نستنتج

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}<[\hat{A}, \hat{B}]>\right)^2 \qquad (4-20)$$

هذه هي علاقة اللاتحديد العامه

لو فرضنا ان المؤثر $\hat{A}$ يمثل مؤثر الموقع $\hat{A} = x$ وان المؤثر $\hat{B}$ يمثل مؤثر الزخم $\hat{B} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ فان علاقة التبادل بينهما

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

عليه

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}i\hbar\right)^2$$

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

ولان الانحراف القياسي بطبيعته موجب

$$\sigma_A\sigma_B \geq \frac{\hbar}{2}$$

ونستطيع القول

(لكل عملية قياس مؤثراتهما غير متبادله هناك مبدأ لادقه)

وهذا يعني ان المؤثرين لا يشتركان بنفس الداله ، وعلى الاقل ان ليس لهما مجموعه كامله من دوال مشتركه

مثال :

1- اثبت علاقة التبادل $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$

2- اثبت ان $[x^n,p]=i\hbar n x^{n-1}$

3- بين الاكثر عموما $[f(x),p]=i\hbar\frac{df}{dx}$ لاي داله $f(x)$

الحل:

(1)
$$\begin{aligned}[AB,C]&=ABC-CAB\\&=ABC-ACB+ACB-CAB\\&=A[B,C]+[A,C]B\end{aligned}$$

(2) لتكن $g(x)$ دالة اخيبار

$$\begin{aligned}[x^n,p]g&=x^n\frac{\hbar}{i}\frac{dg}{dx}-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x^ng)\\&=x^n\frac{\hbar}{i}\frac{dg}{dx}-\frac{\hbar}{i}\left(nx^{n-1}g+x^n\frac{dg}{dx}\right)\\&=i\hbar nx^{n-1}g\\ [x^n,p]&=i\hbar nx^{n-1}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}[f,p]g&=f\frac{\hbar}{i}\frac{dg}{dx}-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(fg)\\&=f\frac{\hbar}{i}\frac{dg}{dx}-\frac{\hbar}{i}\left(\frac{df}{dx}g+f\frac{dg}{dx}\right)\\&=i\hbar\frac{df}{dx}g\\ [f,p]&=i\hbar\frac{ddf}{dx}\end{aligned}$$

مثال : برهن علاقة اللادقة (عدم التحديد) (اللاتعيين) المشهوره بين عدم الدقه في الموقع ($\hat{A}=x$) مع اللادقه بالطاقه ($\hat{B}=\frac{p^2}{2m}+U$).

الحل:

$$\left[x,\frac{p^2}{2m}+U\right]=\frac{1}{2m}\left[x,p^2\right]+\left[x,U\right]$$

$$\begin{aligned}\left[x,p^2\right]&=xp^2-p^2x\\&=xp^2-pxp+pxp-p^2x\\&=\left[x,p\right]p+p\left[x,p\right]\end{aligned}$$

ولكن لدينا

$$\left[x,p\right]=i\hbar$$

$$\left[x,p^2\right]=i\hbar p+pi\hbar=2i\hbar p$$

$$\left[x,U\right]=0$$

وعليه

$$\left[x,\frac{p^2}{2m}+U\right]=\frac{1}{2m}2i\hbar p=\frac{i\hbar p}{m}$$

نستخدم علاقة اللاتحديد العامه

$$\sigma_A^2\sigma_B^2\geq\left(\frac{1}{2i}<[\hat{A},\hat{B}]>\right)^2$$

$$\sigma_x^2\sigma_H^2\geq\left(\frac{1}{2i}\frac{i\hbar}{m}<p>\right)^2$$

$$\sigma_x\sigma_H\geq\frac{\hbar}{2m}\left|<p>\right|$$

واذا اخذنا الحاله الارضية (المستقره) بنظر الاعتبار نجد ان

$<p>=0$ و بالتالي $\sigma_H=0$

$0\geq 0$ لا تخبرنا باي شيء