Simple Harmonic Oscillator

المثال للمتذبذب التوافقي الكلاسيكي هو كتله m تريتبط بنابض له ثابت قوة

k والحركه يحكمها قانون هوك. $F = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

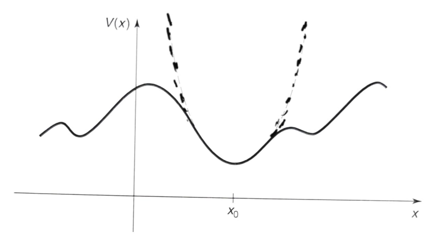
باهمال الاحتكاك يكون الحل للمعادله هو $x(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt)$ أذ ان

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad .... \quad (44\text{-}3)$$

w يمثل هو التردد الزاوي للتذبذب والطاقه الكامنه هي

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad .... \quad (45\text{-}3)$$

والرسم البياني لها هو قطع مكافيء parabola



تقريب مكافي (الخط المنقط) لجهد اعتباطي بجوار موقع النقطه الصغرى

في الحقيقه لا يوجد متذبذب مثالي 100 % وبالتالي مع مرور الوقت سيتوقف النابض وان قانون هوك يفشل قبل توقف المتذبذب نهائيا ولكن عمليا يمكن تقريب الجهد للقطع المكافيء كما في الشكل اعلاه. يمكن توسعة الداله $U(x)$ على شكل متسلسلة تايلور حول النقطه الصغرى x_0 كالتالي

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$$

يمكن رفع $U(x_0)$ واضافة ثابت الى $U(x)$ لان ذلك لا يؤثر على القوة وكذلك نستطيع اهمال $U'(x_0)$ لان قيمة المشتقه الاولى لاي داله عند النهايه الصغرى تساوي صفر وكذلك يمكن اهمال القيم العليا من المفكوك لان $(x - x_0)$ مقدار صغير لذلك نحصل على

$$U(x) \cong \frac{1}{2} U''(x_0)(x - x_0)^2$$

وهذه تصف حركه تذبذبيه توافقيه بسيطه حول النقطه x_0 بثابت نابض مؤثر $k = U''(x_0)$ (عادة اي حركه تذبذبيه هي تقريبا حركه توافقيه بسيطه كلما كانت الازاحه صغيره)

المساله الكميه هي حل معادلة شرودنجر لجهد من النوع

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mw^2 x^2 \qquad .... \qquad (46\text{-}3)$$

ان معادلة شرودنجر غير المعتمده على الزمن هي

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2} mw^2 x^2 \Psi = E\Psi \qquad .... \qquad (47\text{-}3)$$

هناك طريقتين لحل هذه المعادله وسنبدأ بالطريقه الاسهل والافضل:

<u>الطريقه الاولى:</u>

سنعيد كتابة المعادله (47-3) بشكل اخر

$$\frac{1}{2m}\left[p^2 + (mwx)^2\right]\Psi = E\Psi \qquad .... \qquad (48\text{-}3)$$

اذ ان $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ هو مؤثر الزخم والفكره هي شكل الهاملتونين

$$H = \frac{1}{2m}\left[p^2 + (mwx)^2\right] \qquad .... \qquad (49\text{-}3)$$

لنعرف المؤثرين التاليين:

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar mw}}(-ip + mwx)$$
$$a^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar mw}}(+ip + mwx) \qquad .... \qquad (50\text{-}3)$$

لاحظ ان المقدار داخل القوس الكبير في الهاملتونين يتحلل الى فرق مربعين

$$\left[p^2 + (mwx)^2\right] = (ip + mwx)(-ip + mwx)$$

والان لنرى ماذا يعني حاصل الضرب $a^- a^+$ ؟

$$a^- a^+ = \frac{1}{2\hbar mw}(ip + mwx)(-ip + mwx)$$

$$=\frac{1}{2\hbar mw}\left[p^2+(mwx)^2-imw(xp-px)\right]$$

سنسمي القوس الاخير قوس تبادل بين x و p (انه يقيس لمدى فشلهم في تبادل المواقع). بصورة عامه فان تبادل المؤثرات $\hat{A}$ و $\hat{B}$ تكتب في قوس مربع كالتالي

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A} \quad .... \quad (51\text{-}3)$$

في هذه المضمار فان

$$a^-a^+=\frac{1}{2\hbar mw}\left[p^2+(mwx)^2\right]-\frac{1}{2\hbar}\left[x,p\right] \quad .... \quad (52\text{-}3)$$

العمل مع المؤثرات يحتاج نوع من الدقه فلايجاد قوس تبادل بين مؤثرين يجب ان نضربهما بداله وبعد ايجاد النتيجه نرفع الداله ونحصل على نتيجة التبادل بين المؤثرين فقط كما في المثال التالي:

$$\left[x,p\right]f(x)=\left[x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}f(x)-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(xf(x)\right]$$

$$=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{df(x)}{dx}-x\frac{df(x)}{dx}-f(x)\frac{dx}{dx}\right)$$

$$=i\hbar f(x)$$

نرفع الداله $f(x)$ من الطرفين (الداله تسمى دالة اختبار test function)

$$\left[x,p\right]=i\hbar \quad .... \quad (53\text{-}3)$$

هذه نتيجه تسمى علاقة التبادل القانونيه canonical commutation relation

بهذه النتيجه فان العلاقه (3-52) تاخذ الشكل التالي

$$a^-a^+=\frac{1}{\hbar w}H+\frac{1}{2}$$

او نكتبها كالتالي

$$H=\hbar w\left(a^-a^+-\frac{1}{2}\right) \quad .... \quad (54\text{-}3)$$

وبنفس الطريقه نجد ان

$$a^+a^-=\frac{1}{\hbar w}H-\frac{1}{2}$$

او نكتبها كالتالي

$$H = \hbar w\left(a^{+}a^{-} + \frac{1}{2}\right) \quad .... \qquad (55\text{-}3)$$

وكذلك فان

$[a^{-}, a^{+}] = 1$ .... (56-3) برهن هذه العلاقه؟

عليه تكون معادلة شرودنجر (2-48) للمتذبذب التوافقي بالشكل التالية

$$\hbar w\left(a^{+}a^{-} + \frac{1}{2}\right)\Psi = E\Psi$$
$$\hbar w\left(a^{-}a^{+} - \frac{1}{2}\right)\Psi = E\Psi \quad .... \qquad (57\text{-}3)$$

وهنا وصلنا المرحله المهمه ان اذا كانت الداله Ψ تحقق معادلة شرودنجر بطاقه مقدارها E اي ان $(H\Psi = E\Psi)$ فان $a^{+}\Psi$ تحقق معادلة شرودنجر بطاقه مقدارها $(E + \hbar w)$ اي ان $(H(a^{+}\Psi) = (E + \hbar w)(a^{+}\Psi))$ وسنبرهن هذا:

البرهان

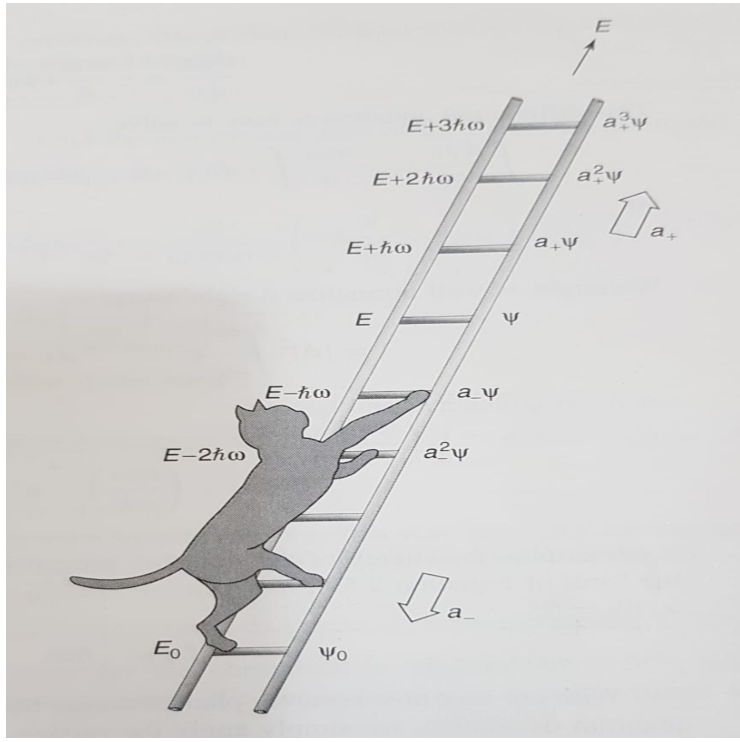
$$H(a^{+}\Psi) = \hbar w(a^{+}a^{-} + \frac{1}{2})(a^{+}\Psi)$$
$$= \hbar w\left(a^{+}a^{-}a^{+} + \frac{1}{2}a^{+}\right)\Psi$$
$$= \hbar w a^{+}\left(a^{-}a^{+} + \frac{1}{2}\right)\Psi$$
$$= a^{+}\left[\hbar w\left(a^{+}a^{-1} + + \frac{1}{2}\right)\Psi\right]$$
$$= a^{+}(H + \hbar w)\Psi = a^{+}(E + \hbar w)\Psi$$
$$= (E + \hbar w)(a^{+}\Psi)$$

اذ اننا استخدمناالعلاقه (3-56) لستبدال $a^{-}a^{+}$ ب $a^{+}a^{-} + 1$ مع ملاحظة ان المؤثر يتبادل مع اي ثابت.

بنفس الطريقه فان $H(a^{-}\Psi) = (E - \hbar w)(a^{-}\Psi)$ اثبت ذلك؟

تسمى المؤثرات a^{+}, a^{-} بالمؤثرات السلميه ladder operators كما ان a^{+} يسمى مؤثر رفع raising operator كما يسمى المؤثر a^{-} بمؤثر الخفض

Lowering operator والشكل التالي يمثل سلم طاقات و دوال (حالات) المتذبذب التوافقي :



سلم الحالات (الدوال) للمتذبذب التوافقي

ماذا نتوقع لو اننا اثرنا باستمرار على الداله Ψ بالمؤثر a^- ؟ بالتاكيدسنصل الى حاله تكون طاقتها اقل من الصفر وهذا غير ممكن لذلك عندنقطةمعينه سيفشل العمل وهذا يرجع الى ان الدوال الناتجه قد لا يمكن معايرتهاكان تكون صفراًاو ما لانهايه لذلك يجب ان يتوقف عمل المؤثر a^- عند الداله Ψ_0 مثل ذلك

$$a^-\Psi_0 = 0 \quad .... \qquad (58\text{-}3)$$

وهذه علاقه مهمه جدا ومنها نستطيع حساب الداله $\Psi_0(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar mw}}\left(\hbar\frac{d}{dx} + mwx\right)\Psi_0 = 0$$

او

$$\frac{d\Psi_0}{dx} = -\frac{mw}{\hbar}x\Psi_0$$

$$\int \frac{d\Psi_0}{\Psi_0} = -\frac{mw}{\hbar}\int x dx$$

$$\ln \Psi_0 = -\frac{mw}{2\hbar}x^2 + const.$$

$$\Psi_0(x) = Ae^{-\frac{mw}{2\hbar}x^2}$$

ولايجاد قيمة الثابت A نجري عملية المعايره

$$\int \Psi_0^*(x)\Psi_0(x)dx = 1$$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mwx^2/\hbar}dx = |A|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{mw}} = 1$$

ولذلك $A^2 = \sqrt{\frac{mw}{\pi\hbar}}$

وبذلك تكون الداله

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{mw}{2\hbar}x^2} \quad .... \quad (59\text{-}3)$$

ولحساب الطاقه نضع الداله الموجيه(3-59) في العلاقه(3-57) مع ملاحظةان

$$a^-\Psi_0 = 0$$

نجد ان

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar w \quad .... \quad (60\text{-}3)$$

بعد معرفتنا بالداله المستقره (الارضيه ground state) يمكننا تطبيقمؤثر الرفع عدة مرات لايجاد الدوال المتهيجه مع ملاحظة انه في كل مرهتزيد الطاقه بمقدر $\hbar w$.

$$\Psi_n(x) = A_n(a^+)^n\Psi_0(x)$$
$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar w \quad .... \quad (61\text{-}3)$$

اذ ان A_n يمثل ثابت المعايره.

مثال: جد الحالة المتهيجه الاولى للمتذبذب التوافقي؟

سنستخدم العلاقه (3-61) لحل المسأله

$$\Psi_1(x) = A_1 a^+ \Psi_0(x)$$

$$\Psi_1(x) = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar mw}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + mwx\right)\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{mw}{2\hbar}x^2}$$

$$= A_1\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2mw}{\hbar}}\ \mathrm{x}\mathrm{e}^{-\frac{mw}{2\hbar}x^2}$$

والان يجب ان نعاير الداله لايجاد الثابت A_1

$$\int |\Psi_1(x)|^2 dx = \int \Psi_1^*(x)\Psi(x)dx = 1$$

$$|A_1|^2\sqrt{\frac{mw}{\pi\hbar}}\left(\frac{2mw}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{mw}{\hbar}x^2} dx = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

ومنه ثابت المعايره $A_1 = 1$

فلو فرضنا اننا نريد ايجاد الداله $\Psi_{50}(x)$ فالمعادله (3-61) تعطينا ذلك باستثناء ثابت المعايره.

نحن نعرف ان $a^{\pm}\Psi_n$ تتناسب مع $\Psi_{n\pm 1}$ عليه

(62-3) .... $a^+\Psi_n = c_n\Psi_{n+1}$ وكذلك $a^-\Psi_n = d_n\Psi_{n-1}$

ولكن ماذا عن عوامل التناسب c_n و d_n اولا لنلاحظ مايلي

(63-3) .... $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(\mp f)^* g dx$

في لغة الجبر الخطي فان $a^{\mp}$ هو المرافق الهرميتي $a^{\pm}$

<u>البرهان</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a_{\pm}g)dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar mw}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*\left(\mp\hbar\frac{d}{dx}+mwx\right)gdx$$

$\int f^*(\frac{dg}{dx})dx$ to $-\int(\frac{df}{dx})^* gdx$ by parts التكامل بالتجزئه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a^{\times}g)dx = \frac{1}{\sqrt{2\hbar mw}} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\pm\hbar\frac{d}{dx}+mwx\right)f\right]^* gdx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(\mp f)^* gdx$$

وهو المطلوب

وبشكل خاص فان

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a^{\pm}\Psi_n)^*(\pm\Psi_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(a\mp a\pm\Psi_n)^*\Psi_n dx$$

ولدينا

$$a^+a^-\Psi_n = n\Psi_n \quad , \quad a^-a^+\Psi n = (n+1)\Psi_n \quad .... \quad (64\text{-}3)$$

لذلك

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a^+\Psi_n)^*(a^+\Psi_n)dx = |c_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_{n+1}|^2 dx = (n+1)\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_n|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a^-\Psi_n)^*(a^-\Psi_n)dx = |d_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_{n-1}|^2 dx = n\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_n|^2 dx$$

وبما ان Ψ_n و $\Psi_{n\pm1}$ دوال عياريه(معايره) نستنتج ان $|c_n|^2 = n+1$ وكذلك

$|d_n|^2 = n$

وعليه

$$a^-\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1} \quad \text{كما ان} \quad a^+\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1} \quad .... \quad (65\text{-}3)$$

وهكذا

$$\Psi_1 = a^+\Psi_0 \ ,$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a^+\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2\Psi_0$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}a^+\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}a^+(\frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3*2}}(a^+)^3\Psi_0$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} a^+ \Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4*3*2}} (a^+)^4 \Psi_0$$

وهكذا لبقية الدوال

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \Psi_0 \quad .... \qquad (66\text{-}3)$$

وهذا يوضح ام عامل المعايره $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

مثال:

جد القيمه المتوقعه للطاقه الكامنه في الحاله n للمتذبذب التوافقي؟

$$< U > = \langle \frac{1}{2} m w^2 x^2 \rangle = \frac{1}{2} m w^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* x^2 \Psi_n dx$$

من المعادله (3-50) نجد ان

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} (a^+ + a^-)$$
$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m w}{2}} (a^+ - a^-) \quad .... \qquad (67\text{-}3)$$

في هذا المثال لدينا x^2 :

$$x^2 = \frac{\hbar}{2mw} \left[(a^+)^2 + a^+ a^- + a^- a^+ + (a^-)^2 \right]$$

عليه فان

$$\langle U \rangle = \frac{\hbar w}{4} \int \Psi_n^* \left[(a^+)^2 + a^+ a^- + a^- a^+ + (a^-)^2 \right] \Psi_n dx$$

$$\langle U \rangle = \frac{\hbar w}{4} (n + n + 1)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right)$$