معنى ذلك ان احتمالية النفاذ تساوي100% عندما يكون عرض الحاجزمساويا الى عدد صحيح من انصاف موجة دي برولي المرافقه للجسيم اي انالموجه تخترق الحاجز ولا ينعكس منها شيء

2- **<u>الحاله الثانيه</u>** $E < V_0$

يمكن حساب معامل النفاذ ومعامل الانعكاس بسهوله أذا وضعنا $\beta = i\gamma$ وان

$\gamma = \sqrt{\left(\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\right)}$ وعوضنا هذه القيمهبدلا عن β في المعادلات(3-17) و (3-18) نستطيع عندها حساب معامل النفاذ الجديدوهو

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left|1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\beta a)}{4E(V_0 - E)}\right|^{-1}$$

ان هذه القيمه تبدأ بالتناقص كلما زاد الفرق بين V_0 و E ومع ذلكفهناك احتمالية لاختراق الحاجز من قبل الجسيم وهذه الظاهره تسمى بالاختراق النفقي Barrier Tunneling أذ يبدو وكان الجسيم يخترق الحاجز الجهدي من خلال نفق فيه لان طاقته غير كافيه لاجتيازه .

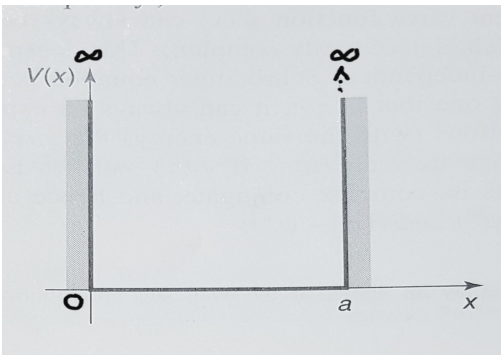
<u>ب- الجسيمات المقيده:</u>

جسيم محصور في بئرجهد: يقصد ببئر الجهد تمثيل رياضي لحركةجسيم في منطقه محدده يكون فيها الجهد ثابتا واذا ما اقترب الجسيم من حدودهذه المنطقه سلطت عليه قوى كبيره نتيجة لوجود انحدار عالي في الجهدوهذه القوى ستفرض على الجسيم العوده الى داخل المنطقه، لذلك تمثل بجدران عاليه من الجهد ومن هنا ياتي اصطلاح بئر الجهد.

<u>1- بئر جهد لا نهائ الارتفاع (جسيم في صندوق):</u>

لنفرض ان $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x \le a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$ الجسيمداخل هذا الجهد يكون حرا تماما ما عدا في النهايتين($x = 0$ و $x = a$) اذ توجد قوة تمنعه من الهروب ، يمكن مقارنة هذا الجهد كلاسيكيا بمثالالعربه التيعلى سطحافقي

عديم الاحتكاك مع مصدات مرنه تماما في النهايات بحيث تبقى العربةتتحرك ذهابا وايابا الى الابد (وهذا المثال هو تمثيل خيالي ليس الا).



بئر جهد لا نهائي الارتفاع

خارج البئر $\psi(x)=0$ اما داخل البئر ($U(x)=0$) فان معادلة شرودنجر هي

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \qquad \text{.....} \qquad (19\text{-}3)$$

ليكن $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=k$ فان المعادله (3-19) تكون

أو $$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \qquad \text{.....} \qquad (20\text{-}3)$$

هنا اعتبرنا ان $E>0$ وان $E<0$ لايمكن ان تعمل في هذا المثال (المعادله(20-3) معادلة متذبذب توافقي كلاسيكي) ولها الحل التالي

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \qquad \text{.....} \qquad (21\text{-}3)$$

لايجاد الثوابت نستخدم حالات الحدود والاستمراريه

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \qquad \text{.....} \qquad (22\text{-}3)$$

$$\psi(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = B$$

لذلك $B=0$ لكي تتحقق حالة الحدود خارج البئر عليه

$$\psi(x) = A\sin(kx) \qquad \text{.....} \qquad (23\text{-}3)$$

$$\psi(a) = 0 = A\sin(ka)$$

اما $A=0$ وهذا حل غير مقبول لذلك $\sin(ka)=0$

بمعنى ان $ka = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm \ldots\ldots \pm n\pi$

قيمة $k = 0$ حل لا معنى له والحل السالب لا يقدم شيئا لان $\sin(-k) = -\sin(k)$

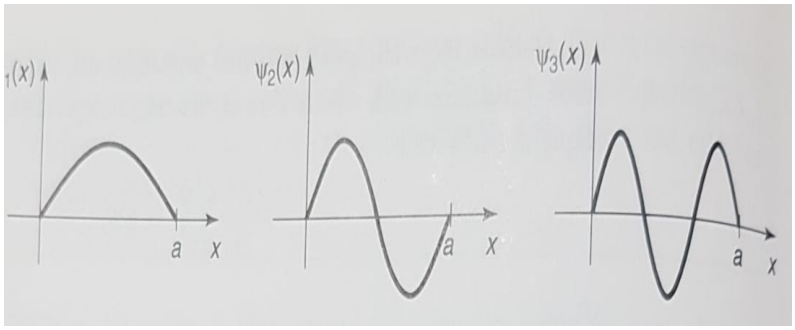
لذلك سنمتص الاشاره السالبه في الثابت A عليه $k_n = \frac{n\pi}{a}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

وبذلك تكون الداله الموجيه $\psi_n(x) = A\sin(\frac{n\pi}{a}x)$ ويمكن اجراء المعايره لايجاد الثابت A

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx)dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1$$

وعليه تكون الداله المعايره هي $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24\text{-}3)$$



اول ثلاث حالات مستقره لبئر الجهد لا نهائي الارتفاع

الداله $\psi_n(x)$ لها مميزات مهمه

1- انها تتناوب بين ان تكون داله زوجيه مره وفرديه مره اخرى نسبة الى مركز البئر ، $\psi_1(x)$،

داله زوجيه ، $\psi_2(x)$ داله فرديه وهكذا.

2- بزيادة قيمة n تتقاطع الداله(عقده) مع المحور x فالداله الاولى ليس لها عقده ،(النقطه الاخيره لا تحسب) الداله الثانيه لديها عقده واحده والثالثه لها عقدتان وهذه العقد لها علاقه بالطاقه ايضا

3- تكون الدوال متعامده

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = 0 \quad \text{.....} \qquad (25\text{-}3)$$

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{a} x) dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{m - n}{a} \pi x \right) - \cos\left(\frac{m + n}{a} \pi x \right) dx$$

$$= \left\{ \frac{1}{(m - n)\pi} \sin\left(\frac{m - n}{a} \pi x \right) - \frac{1}{(m + n)\pi} \sin\left(\frac{m + n}{a} \pi x \right) \right\} \Big|_0^a$$

$$= \left\{ \frac{\sin[(m - n)\pi]}{(m - n)\pi} - \frac{\sin[(m + n)\pi]}{(m + n)\pi} \right\} = 0$$

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{.....} \qquad (26\text{-}3)$$

أذ ان δ_{mn} تسمى كرونكر دلتا وتعرف كالتالي

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 1 & \text{if } m = n \end{cases}$$

4- تعتبرالدوال متكاملهاي ان اي داله مثل $f(x)$ يمكن توصيفها كعلاقه خطيه بدلالة تلك الدوال

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{a} x) \quad \text{.....} \qquad (27\text{-}3)$$

يمكن ايجاد قيمة الثابت C_n بطريقة (خدعة فورير) :

نضرب طرفي المعادله (3-37) في $\psi_m(x)^*$ ثم نجري التكامل

$$\int \psi_m(x)^* f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{mn} = C_m$$

$$C_n = \int \psi_n(x) f(x) dx \quad \text{.....} \qquad (28\text{-}3)$$

اما بخصوص الطاقه فلدينا $k_n = \frac{n\pi}{a}$ والطاقه تحسب من العلاقه $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$

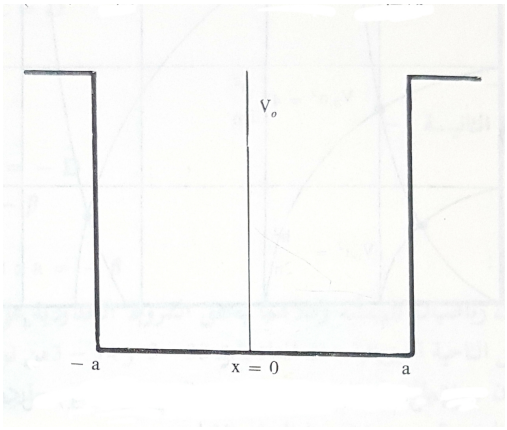
وبالتالي

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{.....} \qquad (29\text{-}3)$$

بئر جهد محدود الارتفاع: Finite Potential well

الشكل التالي يوضح صوره لجهد محدود الارتفاع أذ ان القوى المسلطه على الجسيم حين وصولها الى النقاط $x = \pm a$ محدودة القيمه وبالتالي تكون الجدران محدودة الارتفاع وجهد من هذا النوع يوصف رياضيا بالعلاقه

$$U(x) = \begin{cases} 0 & -a < x < a \\ V_0 & |x| > a \end{cases}$$



بئر جهد ارتفاعه V_0 وعرضه $2a$

سنددرس حالة الجسيم عندما تكون طاقته $E < V_0$ اي ان الجسيم مقيد ولذلك تاخذ معادلة شرودنجر الشكل التالي

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1(x) = 0 \qquad -a < x < a$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_2(x) = 0 \qquad |x > a|$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \alpha^2\psi_1(x) = 0 \qquad -a < x < a$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - \beta^2\psi_2(x) = 0 \qquad |x > a|$$

أذ ان $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ وان $\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

ويمكن وضع الحلول التاليه للمعادلات اعلاه

$$\psi_1(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x) \quad \text{.....} \quad (3\text{-}30)$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-\beta x} + De^{\beta x} \quad \text{.....} \quad (3\text{-}31)$$

في المعادله(3 -31) تكون قيمة $D = 0$ اذا كانت $\psi_2(x)$ تمثل جسيما في المنطقه $x > a$ وان $C = 0$ اذا كانت $\psi_2(x)$ تمثل جسيما في المنطقه $x < -a$

وذلك لكي لا تذهب الداله الموجيه للمالانهيه خارج حدود البئر

ومن شرط الاستمراريه للداله ومشتقتها على جانبي البئر

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) \qquad x = \pm a$$

$$\frac{d\psi_1(x)}{dx} = \frac{d\psi_2(x)}{dx} \qquad x = \pm a$$

وبتطبيق هذه الشروط على المعادلتين (3-30) و (3-31) نحصل على:-

$$A\sin(\alpha a) + B\cos(\alpha a) = Ce^{-\beta a} \qquad x = a \quad \text{.....} \quad (3\text{-}32)$$

$$\alpha A\cos(\alpha a) - \alpha B\sin(\alpha a) = -\beta Ce^{-\beta a} \qquad x = a \quad \text{.....} \quad (3\text{-}33)$$

كذلك لدينا

$$-A\sin(\alpha a) + B\cos(\alpha a) = De^{-\beta a} \qquad x = -a \quad \text{.....} \quad (3\text{-}34)$$

$$\alpha A\cos(\alpha a) + \alpha B\sin(\alpha a) = \beta De^{-\beta a} \qquad x = -a \quad \text{.....} \quad (3\text{-}35)$$

بطرح المعادلتين (3-32) و (3-34) مره وجمعهما مره اخرى نحصل على

$$2A\sin(\alpha a) = (C - D)e^{-\beta a} \quad \text{.....} \quad (3\text{-}36)$$

$$2B\cos(\alpha a) = (C + D)e^{-\beta a} \quad \text{.....} \quad (3\text{-}37)$$

وبجمع المعادلتين (3-33) و (3-35) مره وطرحهما مره اخرى نحصل على:

$$2\alpha A\cos(\alpha a) = -\beta(C - D)e^{-\beta a} \quad \text{.....} \quad (3\text{-}38)$$

$$2\alpha B\sin(\alpha a) = \beta(C + D)e^{-\beta a} \quad \text{.....} \quad (3\text{-}39)$$

من المعادلتين(3-36) والمعادله(3-38) وعلى فرض ان $A \neq 0$ و $C \neq D$ نحصل على

$$\alpha \cot(\alpha a) = -\beta \quad \text{.....} \quad (3\text{-}40)$$

كذلك من المعاداتين(3-37) والمعادله(3-39) وعلى فرض ان $B \neq 0$ و $C \neq D$ نحصل على

$$\alpha \tan(\alpha a) = \beta \quad \text{.....} \quad (3\text{-}41)$$

لا يمكن ان تصح المعادلتين (3-40) و (3-41) في ان واحد لانه بقسمة المعادلتين على بعضهما نحصل على $\tan^2(\alpha a) = -1$ وهذا معناه ان α كميه خياليه او ان β كميه سالبه وهذا يناقض حقيقة هاتين الكميتين لذلك سوف تبرز لدينا حالتان متميزتان:-

<u>الحاله الاولى:</u>

$A = 0$ وان $C = D$ ومنها نحصل على

$$\alpha \tan(\alpha a) = \beta \quad \text{.....} \quad (3\text{-}42)$$

<u>الحاله الثانيه:</u>

$B = 0$ و $C = D$ ومنها نحصل على

$$\alpha \cot(\alpha a) = -\beta \quad \text{.....} \quad (3\text{-}43)$$

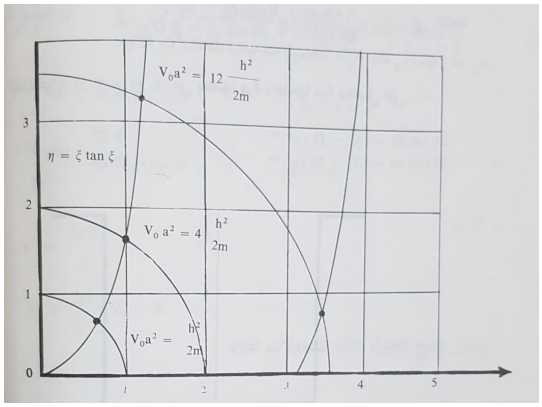
المعادلتين(3-42) و(3-43) حلان رياضيان للمساله ولايمكن ايجادجذورهما تحليليا الا بالحل العددي او بطريقة الرسم وسنختار الحل الثاني اي بطريقة الرسم

نفرض ان $\alpha a = \xi$ وكذلك $\beta a = \eta$

من المعادله (3-42) $\xi \tan(\xi) = \eta$

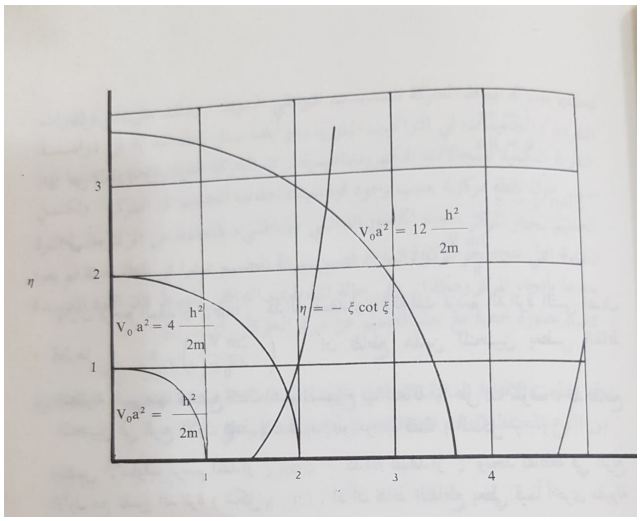
فان $\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$

والان نرسم المقدار $\xi \tan(\xi)$ كدالة للمقدار ξ وكذلك نرسم الدائرةالتي نصف قطرها $a \sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)}$ ان تقاطع هذين المنحنيين يعطي الجذور المطلوبه والتي منها نستطيع تعيين القيم المسموحة للطاقة E وسنأخذ تقاطع المنحنيين في الربع الاول فقط كما في الشكل التالي:



الحل بطريقة الرسم للمعادله (3-42)

وبنفس الاسلوب نرسم المقدار $-\xi \cot(\xi)$ كدالة للمقدار ξ ونجدتقاطعه في الربع الاول مع
مع نفس الدائره كما في الشكل التالي



الحل بطريقة الرسم للمعادله (3-43)