الاحتماليه Probability

تلعب الاحتماليه دورا مركزيا في الميكانيك الكمي بسبب التفسير(التأويل) الاحصائي

وسنأخذ المثال التالي لتوضيح ذلك.

لنتصور ان غرفة تحتوي على 14 شخصا ولهم الاعمار التاليه

شخص واحد عمره 14

شخص واحد عمره 15

ثلاثة اشخاص اعمارهم 16

شخصان عمريهما 22

شخصان عمريهما 24

خمسة اشخاص اعمارهم 25

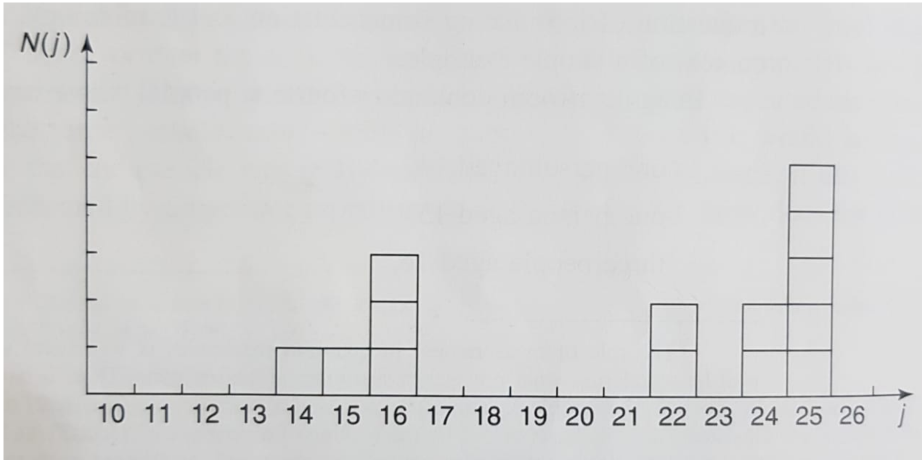
ليكن $N(j)$ عدد الاشخاص الذين اعمارهم j وبالتالي يمكن كتابةالمعلومات اعلاه كالتالي

$$N(14)=1$$
$$N(15)=1$$
$$N(16)=3$$
$$N(22)=2$$
$$N(24)=2$$
$$N(25)=5$$

مجموع الاشخاص في الغرفه N ويساوي

$$N(j)=\sum_{j=0}^{\infty} N(j) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2\text{-}12)$$

في هذا المثال $N=14$ والرسم البياني(المدرج الاحصائي) يوضح هذه البيانات



رسم بياني يوضح عدد الاشخاص ، $N(j)$ بعمر j للتوزيع الموضح اعلاه

فلو سألناهنا ما هي الاحتماليهان يكون شخص(اختيرعشوائيا من المجموعه) عمره 15؟

الجواب: فرصة واحده من14 لان هناك14 خيار كلها متساويه واحدها لهعمر 15 .

فأذا افترضنا ان $p(j)$ تمثل الاحتماليه للحصول على العمر j فأن :

$p(15)=\frac{1}{14}$ ، $p(14)=\frac{1}{14}$ ، $p(16)=\frac{3}{14}$ وهكذا لبقية الاعمار ولذلك

$$p(j)=\frac{N(j)}{N} \qquad .... \qquad (2\text{-}13)$$

نلاحظ ان احتمالية الحصول على الاعمار14 و15 هي مجموع الاحتماليات الذاتيه وفي هذه الحاله تساوي $\frac{1}{7}$ وعليه فان مجموع جميع الاحتماليات يساوي واحد.

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(j)=1 \qquad .... \qquad (2\text{-}14)$$

وللاجابه على سؤال ما هو العمر الاكثر احتمالا؟ نجد انه عمر25 لان هناك خمسة اشخاص تتشارك نفس العمر وبصورة عامه فان j الاكثر احتمالا هو j الذي فيه $p(j)$ اكبر ما يمكن.

اما السؤال ماهو معدل العمر فالجواب هو 23 ، والذي هناك سبعة اشخاص اعمارهم اقل من 23 كما ان هناك سبعة اشخاص اعمارهم اكبر من 23 وبصورة عامه فان المعدل (الوسط) هو قيمة j التي تعطي احتمالية الحصول على نتيجة اكبر مشابهه لتلك الاحتماليه التي تعطي الحصول على نتيجة اصغر.

ويمكن ان نسأل ما هو معدل (او وسط) العمر ؟ والجواب هو

$$\frac{(14)+(15)+3(16)+2(22)+2(24)+5(25)}{14}=\frac{294}{14}=21$$

اي يمكن كتابة معدل قيمة j والتي سنكتبها بالشكل $\langle j \rangle$ هي

$$\langle j \rangle=\frac{\sum jN(j)}{N}=\sum_{j=0}^{\infty} jp(j) \qquad .... \qquad (2\text{-}15)$$

نلاحظ ان المعدل (21) لا يمثل عمر اي شخص في المجموعه. في الميكانيك الكمي يعتبر معدل القيم ذو اهميه وضمن هذا السياق فقد سميت بالقيمه المتوقعه expectation value . انه مصطلح مضلل لانه يشير الى ان هذه النتيجه التى من المرجح ان تحصل عليها اذا اجريت قياسا واحدا(انها القيمه الاكثر احتمالا وليس القيمه المعدل) ولكننا سنهتم بها.

يمكن لاي شخص ان يسأل ما هو معدل مربع العمر ؟ والجواب ستحصل على $14^2=196$ باحتمالية $\frac{1}{14}$ او $16^2=256$ باحتماليه $\frac{3}{14}$ وهكذا وبالتالي فالمعدل هو

$$\langle j^2 \rangle=\sum_{j=0}^{\infty} j^2 p(j) \qquad .... \qquad (2\text{-}16)$$

يمكن التعميم بان معدل قيمة اي داله الى j يعطى بالعلاقه

$$\langle f(j) \rangle=\sum_{j=0}^{\infty} f(j)p(j) \qquad .... \qquad (2\text{-}17)$$

المعادلات 3 ، 4 ، 5 هي حالات خاصة من المعادله 6 .

كما ان معدل قيمة المربع $\langle j^2 \rangle$ ليس بالضروره ان يساوي مربع قيمة المعدل $\langle j \rangle^2$ فاذا كان لدينا طفلان في غرفه احدهما عمره سنه واحدة والثاني عمره ثلاث سنوات عليه $\langle x^2 \rangle=5$ بينما $\langle x \rangle^2=4$.

والان بعد عرفنا المعدل بصورة عامه نريد معرفة مقدار الانحراف، Δj ،عن قيمة هذا المعدل

$$\Delta j = j - \langle j \rangle \qquad .... \qquad (2\text{-}18)$$

وكذلك نريد ان نحسب معدل Δj التي هي اما موجبه او سالبه وتكون مزعجه عندما تساوي صفر .

$$\langle \Delta j \rangle = \sum (j - \langle j \rangle) p(j) = \sum jp(j) - \langle j \rangle \sum p(j)$$

$$\langle \Delta j \rangle = \langle j \rangle - \langle j \rangle = 0$$

مع ملاحظة ان $\langle j \rangle$ هي مقدار ثابت.

لتجنب هذه المشكله يتم التعامل مع متوسط القيمه المطلقه الى Δj ولكن القيم المطلقه يكون التعامل بها غير محبب لوجود الاشاره السالبه التي يتم التغلب عليها باخذ التربع قبل المعدل (المتوسط)

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta j)^2 \rangle \qquad .... \qquad (2\text{-}19)$$

وتعرف هذه الكميه باسم التباين variance , , في التوزيع وأن σ بحدذاتها هي الجذر التربيعي لمتوسط مربع الانحراف عن المتوسط وتسمى الانحراف المعياري standard deviation وهذا الاخير هو مقياس الفرق (الانتشار) حول j .

هناك نظريه بسيطه للتباين :

$$\sigma^2 = \langle (\Delta j)^2 \rangle = \sum (\Delta j)^2 p(j) = \sum (j - \langle j \rangle)^2 p(j)$$

$$= \sum (j^2 - 2j\langle j \rangle + \langle j \rangle^2) p(j)$$

$$= \sum j^2 p(j) - 2\langle j \rangle \sum jp(j) + \langle j \rangle^2 \sum p(j)$$

$$= \langle j^2 \rangle - 2\langle j \rangle \langle j \rangle + \langle j \rangle^2$$

$$= \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2$$

وباخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على

$$\sigma = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2} \qquad .... \qquad (2\text{-}20)$$

نستنتج من المعادله الاخيره ان

$$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2 \qquad .... \qquad (2\text{-}21)$$

وعلى العموم فان $\langle j^2 \rangle$ لايمكن ان تساوي $\langle j \rangle^2$ والمساوات تحدث فقط عندما $\sigma = 0$ اي لا يوجد اي انتشار (No spread) نهائيا.

يمكن التعامل مع الحالات المستمره (continuous variable) كما تعاملنا مع الحالات المتقطعه (discrete variable)

الاحتماليه (المختاره عشوائيا) بين ($x + dx$) هي $\rho(x)dx$ ، ($\rho(x)$ عادة تسمى مثافة الاحتمال (probability density ، الاحتماليه با يكون x بين a و b تعطى بالتكامل على $\rho(x)$

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x)dx \qquad \text{.........} \qquad (2\text{-}22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1 \qquad \text{........} \qquad (2\text{-}23)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx \qquad \text{..........} \qquad (2\text{-}24)$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)dx \qquad \text{............} \qquad (2\text{-}25)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \qquad \text{..........} \qquad (2\text{-}26)$$

مثال:

لنفترض انه تم اسقاط صخره قبالة جرف ارتفاعه h ومن لحظة سقوطها تم التقاط مليون صوره لها في فترات عشوائيه وفي كل صوره تم قياس مسافة سقوط الصخره. ما هو معدل كل هذه المسافات بمعنى ان نقول ما هو المعدل الزمني للمسافه المقطوعه؟

الحل:

تبدأ الصخره من السكون وتتسارع اثناء السقوط وتقضي زمن اكبر فيالقمه ولذلك فمعدل المسافه يجب ان يكون اقل من $\frac{h}{2}$. وباهمال مقاومة الهواء، فان المسافه x عند الزمن t هي

$$x(t) = \tfrac{1}{2} g t^2$$

السرعه هي $\frac{dx}{dt} = gt$ وزمن الطيران الكلي $T = \sqrt{2h/g}$. احتمالية ان تومض الكاميرا في الزمن dt هي $\frac{dt}{T}$ لذلك احتمال ان صوره معينه تظهرمسفه في المدى المقبل dx هي

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,dx$$

من الواضح ان كثافة الاحتماليه

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \qquad (0 \le x \le h)$$

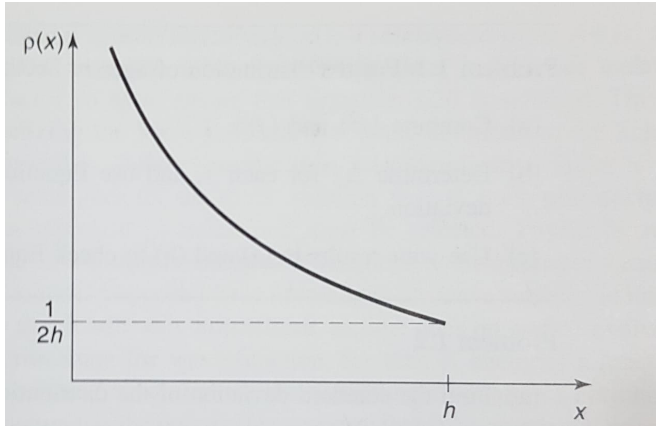
يمكن التاكد من هذه النتيجه باستخدام المعادله (23-2)

$$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(2x^{1/2}\right)\Big|_0^h = 1$$

معدل المسافه يعطى من العلاقه (24-2)

$$\langle x\rangle = \int_0^h x\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

وهذه القيمه اقل من $\frac{h}{2}$



كثافة الاحتمال للمثال اعلاه $\rho(x) = 1/(2\sqrt{hx})$