الفصل الثاني الميكانيك الموجي

1- ازدواجية الجسيم والموجه للاشعاع الكهرومغناطيسي

The Wave- Particle Duality of Electromagnetic Radiation

ان الاشعاع الكهرومغناطيسي مكون من جسيمات (دقائق) تسمى الفوتونات ومن جانب اخر فان تجارب الحيود والتاخل لا يمكن تفسيرها الا على اساس الصفه الموجيه للاشعاع الكهرومغناطيسي

فكيف يمكن التوفيق بين هذين الرأيين المتناقضين؟

ان تجارب الحيود والتداخل تتمثل في البحث عن كيفية واين يسير الضوء وتحتاج الى الصفه الموجيه للضوء لكي يتم تفسيرها بينما الظواهر الاخرى مثل تاثير كومبتون والظاهره الكهروضوئيه وتوليد وفناء الازواج وتوليد الاشعه السينيه وكل هذه تمثل تفاعل الاشعاع مع المادة وفيها نحتاج الصفه الجسيميه للضوء لكي يتم تفسيرها.... وبناءا على ما تقدم يمكن القول ان الضوء عباره عن فوتونات تسير بخطوط غير مستقيمه لكي نجمع الصفتين معا وهو افتراض يناقض نظرية نيوتن للدقائق وايضا يمكن اعتبار الضوء انه تموجات تقود الفوتونات بحيث ان شدة الموجه في اي نقطه تتناسب مع احتمالية وجود الفوتون بتلك النقطه وهذا وصف مخالف للنظريه الكلاسيكيه لانه يتحدث عن احتمالية وجود الفوتون في محل ما بينما النظريه الكلاسيكيه تعطي وصفا لحركة الجسم على مسار بدرجة عاليه من الدقه.

بما ان $P = mV$

وان $E^2 = P^2C^2 + m_0^2C^4$

وان للفوتون كتلة سكون $m_0 = 0$ عليه فان

$$E^2 = P^2C^2 + 0$$

او $E = PC$ كذلك لدينا

وبالتالي نحصل على $E = h\nu = \frac{hC}{\lambda}$

$$PC = \frac{hC}{\lambda}$$

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

هذه معادلة دي برولي والتي تجمع بين الصفه الموجيه من خلال λ والصفه الجسيميه من خلال الكتله ضمن الزخم $P = mV$ حيث تنص نظرية دي برولي على ان كل جسم متحرك ترافقه موجه وسنلاحظ ان الاجسام الصغيره تصح عليها هذه النظريه بينما الاجسام الكبيره تكاد موجتها تساوي صفر من خلال المثال التالي

مثال: احسب طول موجة دي برولي لالكترون يسير بسرعة $(V = 2x10^{6} \ \text{m/s})$ اذ ان للالكترون كتله مقدارها $(m_e = 9.1x10^{-31} \ \text{Kg})$ ثم قارن النتيجه مع جسم يسير بنفس السرعة وكتلته $(10 \ \text{Kg})$؟

$$P = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow\Rightarrow \ \lambda = \frac{h}{P}$$

طول موجة الالكترون

$$\lambda = \frac{6.6x10^{-34} \ \text{J.s}}{9.1x10^{-31}\text{Kg x}2\text{x}10^{6} m/s}$$

$$\lambda = 3.6x10^{-6} m = 3.6A^{o}$$

طول موجة الجسم

$$\lambda = \frac{6.6x10^{-34}}{10x2x10^{6}}$$

$$\lambda = 3.3x10^{-41} m/s$$

$$\lambda = 3.3 \ \text{x}10^{-31} A^{o}$$

نلاحظ من النتيجه رغم السرعه العاليه للجسم فان طول موجته قصيره جدا مقارنة مع موجة الالكترون اي تكاد تكون غير محسوسه اما الالكترون فله صفه موجيه واضحه.

الطبيعه الموجيه(المظهر الموجي) للجسيمات

Wave Aspect of Matter

وضع دي برولي في عام 1924 فكرته التي قال فيها بما ان الاشعه الكهرومغناطيسيه تسلك سلوكا جسيميا في بعض الظروف نه بالمقابل يمكن الافتراض ان الجسيمات الماديه لها سلوك موجي في ظروف خاصه بمعنى ان الازدواجيه ليست فقط للاشعه الكهرومغناطيسيه وانما تنطبق ايضا على الجسيمات من خلال علاقته المشهوره

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$

ولكي تصح فرضية دي برولي يجب ان تكون هناك تجارب عمليه تؤيد صحتها وان اولى التجارب بهذا الخصوص كانت تجربة دافسون – كريمر في الولايات المتحدةوتجربة ثومسون في انكلترا وقد حققت تجاربهما معادلة دي برولي.

تم من خلال هذه التجربه والتي سلطت فيها حزمه من الالكتروناتواطئة الطاقه على سطح ساخن للنيكل(النيكل الساخن يصبح ذو طبيعهبلوريه) ان الالكترونات تتشتت بزاويه معينه وعليهما استخدام قانون براغ لتحقيقصحة قانون دي برولي ولنأخذ المثال التالي

مثال: حزمه الكترونيه طاقتها(54 eV) سلطت بصوره عموديه علىسطح النيكل فتشتت حزمه بكثافه عاليه بزاوية(65 درجه) بالنسبه لمسارالاشعه وباستخدام قانون براغ

$$n\lambda = 2d\sin\vartheta$$

اذ ان d, λ, n هي مرتبة الشده القصوى، طول موجة الاشعه الساقطه، المسافه الفاصله بين المستويات الذريه المتعاقبه في البلوره علىالتوالي.

من خواص النيكل $d = 0.911\,\mathrm{A}^{\circ}$ وعلى فرض ان $n = 1$

$$\lambda = 2x0.911x\sin(65)$$

$$\lambda = 1.65 \ \ A^{o}$$

اما باستخدام قانون دي برولي لحساب الموجه المرافقه للالكترون

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6.63x10^{-34}}{\sqrt{2x9.1x10^{-31}x54x1.6x10^{-19}}}$$

$$\lambda = 1.66x10^{-10} m = 1.66 \ \ A^{o}$$

وهذا تطابق ممتاز بين تجربةدافسون- كريمر وقانون دي برولي واكدتصحة قانون دي برولي.

<u>الصيغه الرياضيه للموجه المرافقه للجسيمات</u>

بعد ان تاكد لدينا صحة قانون دي برولي علينا ايجاد صيغه رياضيهللموجه المرافقه لحركة الجسيم وسنبدأ بما لدينا من معلومات كلاسيكيهلوصف الموجات ومن ابسط الصيغ هي

$$y(x,t) = A\sin(kx - wt)$$

او

$$y(x,t) = Ae^{i(kx - wt)}$$

أذ ان w تمثل التردد الزاوي $w = 2\pi f$ و k يمثل العدد الموجي $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ان سرعة تحرك نقطه ثابة الطور $(kx - wt)$ يمثل سرعة انتقال الموجه

بمعنى ان $(kx - wt = \text{constant})$

$$x = \frac{wt}{k} \text{constant} +$$

وعليه ان سرعة النقطه ثابتة الطور هي u وتساوي

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k}$$

او ما يعرف بسرعة الطور للموجه.

توجد مشكله في هذا الاختيار لشكل الموجه المرافقه وهي

1- انالموجه دوريه تعيد نفسهافي المكان والزمان بشكلا نهائي وتمتدعلى كل قيم x من ∞ - الى ∞+ ففي اي نقطه من نقاط هذه الموجهيوجد الجسم ذو الكيان المتميز في الفضاء.

2- المشكلة الثانية بين سرعة الجسم وسرعة الموجه واللذان يجب ان يتساويان لكي تتحقق المرافقه

من العلاقه المعروفه $u=\lambda\nu$ حيث u سرعة الموجه ν تردد الموجه

ومن علاقة دي برولي

$$\lambda=\frac{h}{mV}\Rightarrow\Rightarrow\ u=\nu\frac{h}{mV} \quad \text{.....} \quad *$$

اذ ان V سرعة الجسم

من علاقة بلانك للموجه المرافقه $E=h\nu$

$$\nu=\frac{E}{h}$$

ومن النسبيه $E=mc^2$

وعليه $\nu=\frac{mc^2}{h}$

نعوض في العلاقه *

$$u=\frac{mc^2}{h}\frac{h}{mV}$$

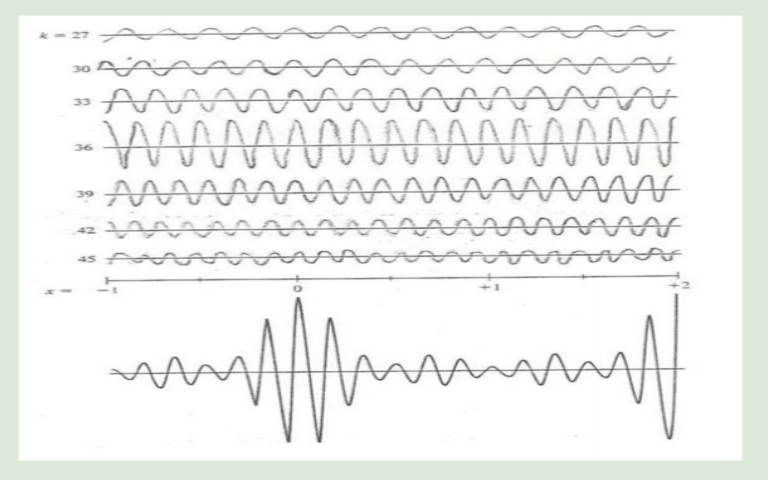
$$u=\frac{c^2}{V}$$

نلاحظ من المعادله الاخيره ان V (سرعةالجسم) لا يمكن ان تبلغسرعة الضوء وبالتالي فان سرعة الموجه(u) ستكون اكبر من سرعة الجسموعليه لا تتحقق المرافقه بين الجسم والموجه.

لذلك علينا البحث عن صيغه رياضيه لكيان موجي يحقق المرافقه مع الجسم .

الحزمه الموجيه Wave Packet

من اجل انهاء مشكلة المرافقة بين الجسم وموجته فلنتصور وجود عددلا نهائي من الموجات المستويه تختلف عن بعضها اختلافا بسيطا في الطول الموجي ونتصور انها تجمع كلاسيكيا على ان تتداخل فيما بينهاتداخلا بناءافي حيز معين من الفضاء واخرتداخلا هداما في باقي نقاط الفضاء وتعطيازاحه موجيه عظمى عند التداخل البناء فان هذا الحيز يمثل موقع الجسم في الفضاء .



صوره لحزمه موجيه مشكله من سبعة امواج مختلف

ولكي ينجح هذا النموذج فيجب ان يبقى حيز التداخل البناء محافظا على كيانه بمرور الوقت وتغير مكانه في الفضاء بسبب حركة الجسم . لاثبات ذلك نضع الصيغه الرياضيه لجمع عدد لا نهائي من الامواج كالاتي

$$G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp(i(kx - wt))dk \quad \text{.....} \quad (1\text{-}2)$$

في هذه المعادله جمعنا كل الاعداد الموجيه k المحتمله ضمن السعه $A(k)$ وان w هنا ايضا داله الى k وكتبت هكذا لانها معروفه ضمنا وللمحافضة على شكل المعادله اعلاه (لان الامواج تتشتت) سنفترض ان التغير في k صغير جدا بمقدار Δk

$$G(x,t) = \int_{\Delta k} A(k)\exp(i(kx - wt))dk \quad \text{.....} \quad (2\text{-}2)$$

بشرط ان $A(k) \neq 0$ لكل قيم k الا على مدى صغير جدا من قيم k

$k_0 - \varepsilon \le k \le k_0 + \varepsilon$ وان $\varepsilon \ll k_0$ اذ ان k_0 هي قيمه مركزيه للعدد الموجي k وهي مقدار ثابت ، عند الاخذ بنظر الاعتبار الملاحظات اعلاه يمكن كتابه $w(k)$ بطريقة مفكوك تايلور

$$w(k) = w_0 + (k - k_0)\left(\frac{dw}{dk}\right)_{k=k_0} + (k - k_0)^2\left(\frac{dw}{dk}\right)^2_{k=k_0} + \text{.....}$$

وبما ان الفرق بين قيم k و k_0 صغير جدا لذلك يمكن اهمال قيم $(k - k_0)$ ذات الاس اثنان فما فوق فتصبح المعادله (2-2) كالتالي

$$G(x,t) = \exp(i(k_0 x - w_0 t)) \int A(k) \exp(i[(k - k_0)(x - (dw/dk)t]dk \quad \ldots\ldots \quad (3\text{-}2)$$

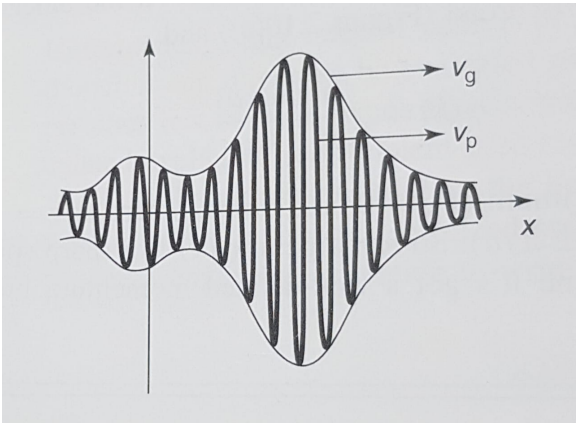
وللسهوله نكتب المعادله

$$G(x,t) = B(x - (\frac{dw}{dk})t) \exp[i(k_0 x - w_0 t)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4\text{-}2)$$

اذ ان

$$B(x - (\frac{dw}{dk})t) = \int A(k) \exp(i[(k - k_0)(x - (dw/dk)t]dk \quad \ldots\ldots \quad (5\text{-}2)$$

المعادله(2-4) توضح بان التركيب الموجي $G(x,t)$ يتكون من حاصل ضرب دالتين الاولى عباره عن موجه مستويه متمثله بالمقدار $\exp[i(k_0 x - w_0 t)]$ والثانيه عباره عن داله هي $B\left(x - \frac{dw}{dk}t\right)$ وبعبارة اخرى فان $G(x,t)$ هي موجه مستويه بطول موجي $\frac{2\pi}{k_0}$ وتردد $\frac{w_0}{2\pi}$ وهذه الموجه معدله بالدالة B والتي تبدو انها تحتوي الموجه المستويه التي تتعدل سعتها حسب قيمة الداله B كما في الصوره التاليه.



حزمه موجيه فيها الغلاف الخارجي ممثل بالداله B التي تتحرك بسرعة مجموعه V_g

اما الموجه فتتحرك بسرعة طور V_p

ان الداله الاحتوائيه(B) هي التي تعطي الكيان الموجي($G(x,t)$) استقراريه في الزمان والمكان اذ انها تعتمد على x و t من خلال $\left(x - \frac{dw}{dk}t\right)$ ومن هنا نستطيع تحديد سرعة هذه الداله

عند الزمن $t=0$ فان $G(x,0)=\exp(ik_0x)B(x)$ وبعد فتره زمنيه t تكون $G(x,t)=B(x-(\frac{dw}{dk})t)\exp[i(k_0x-w_0t)]$ وكانها تحركت مسافه مقداره $\frac{dw}{dk}t$ خلال الفتره الزمنيه t لذلك تكون سرعة الداله الاحتوائيه هي

$$V_g = \frac{dw}{dk} \quad \text{ص} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\text{-}2)$$

$$V_p = u = \frac{w}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}2)$$

والان علينا اثبات عملية المرافقه من خلال سرعة الجسيم V وسرعة المجموعه V_g والتي يجب ان تتساويان.

لنبدأ بالعلاقه النسبيه لكتلة السكون m_0 وكتلة الحركه m للجسيم المتحرك بسرعة V وهي

وكذلك $w = 2\pi\nu = 2\pi\frac{mc^2}{h}$ ومنها فان

$$w = \frac{2\pi m_0 c^2}{h\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{-}2)$$

وعلاقه مشابهه للعدد الموجي $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ \mathrm{p}}{h} = \frac{2\pi\ mV}{h}$

$$k = \frac{2\pi\ m_0 V}{\mathrm{h}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\text{-}2)$$

$$V_g = \frac{dw}{dk} = \frac{dw/dV}{dk/dV} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10\text{-}2)$$

نشتق المعادله (2-8) نحصل عل $\frac{dw}{dV} = \frac{2\pi\ m_0 V}{h\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)^{3/2}}$

نشتق المعادله (2-9) نحصل على $\frac{dk}{dV} = \frac{2\pi m_0}{h\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)^{3/2}}$

نقسم المعادلتين كما في المعادله (2-10) نحصل على

$V_g = V$ ..... (11-2)

ذلك يعني مرافقة الموجه للجسيم وهذا يؤكد السلوك الموجي للجسيم من خلال حزمة الموجة.