اختبارات النسب والارتباطات

اولا": اختبارات النسب :

ان موضوع النسب كثيرا ما يستخدم في البحوث والدراسات لتفسير الظواهر قيد البحث سواءا اكانت ادارية ، طبية، نفسية ،..... الخ . والنسبة هي ناتج قسمة الجزء على الكل ومن الامثلة التي توضح فائدة النسبة في الوصف والتحليل الاحصائي ، نسبة النجاح في امتحان اجري لمجموعة من الطلبة او نسبة الاجابات الصحيحة في احدى الاختبارات الى المجموع الكلي للإجابات وذلك لتحديد مستوى الاسئلة او مستوى الطلبة .... الخ.

فاذا تم تسمية الاجابات الصحيحة بنسبة النجاح فان النسبة المتبقية تسمى الفشل ، وتتضمن اختبارات النسب موضوعين هما :

1- اختبار يتعلق بنسبة واحدة
2- اختبار يتعلق بنسبتين

(1)الاختبار الذي يتعلق بنسبة واحدة : Single proportion test

لتكن (p) تمثل نسبة النجاح وترغب بأجراء اختبار عليها بمقارنتها بقيمة معلومة (نسبة معلومة) ولتكن (p_0) فان نسبة الفشل تمثل ب (q_0) وان قيمتها تساوي ($q= 1-p$) .

- **فرضية الاختبار**

$H_0 : P= P_0$ فرضية العدم

ضد الفرضية البديلة

$H_1 : P < P_0$ او $H_1 : P > P_0$ او $H_1 : P \neq P_0$

- **احصاءة الاختبار :** ان احصاءة الاختبار التي يجري اختبارها ناتجة من تقريب توزيع ثنائي الحدين الى التوزيع الطبيعي وصيغتها كالاتي :

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{Pq_0}{n}}}$$

حيث ان:

Z: احصاءة الاختبار تتوزع توزيع طبيعي قياسي .

$\hat{P}$: نسبة النجاح في العينة .

P_0: قيمة معلومة (نسبة معينة).

q_0: نسبة الفشل ($q_0= 1-p_0$) .

- **اجراءات الاختبار**

1- صياغة فرضية الاختبار
2- استخراج قيمة $\hat{P}$ و q_0 وحساب احصاءة الاختبار .
3- مقارنة قيمة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية (جدولZ).

- **قاعدة القرار :**

اذا كانت القيمة المحسوبة لـ $|Z|$ اكبر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية معين فأننا نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة والعكس بالعكس .

$|Z| > Z_{\alpha/2}$ من طرفين

$Z > Z_{\alpha}$ من طرف واحد (اليمين) أو

$Z < -Z_{\alpha}$ من طرف واحد (اليسار)

مثال:

كان احتمال ان يصيب احد الرماة الهدف يساوي (0.6) فاذا اعطي مائة اطلاقة وطلب منه التصويب نحو الهدف وحققت (70) اطلاقة الهدف ، فهل يمكن اعتماد هذه النتيجة والقول بان مستوى الرامي قد تحسن بمستوى ثقة 95%.

الحل :

$H_0 : P = 0.6$

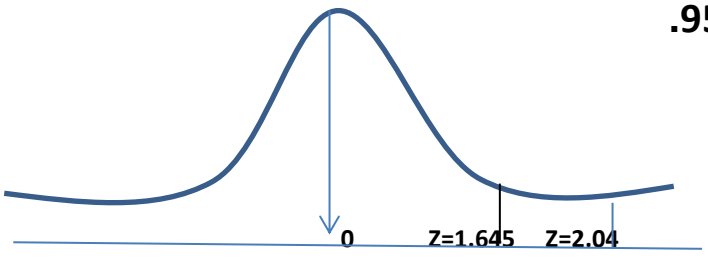
$H_1 : P > 0.6$

من المعطيات $n=100$ ، $p_0 = 0.6$ ، $q_0 = 1-0.6 = 0.4$

$$\hat{P} = \frac{70}{100} = 0.7$$

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P q_0}{n}}} = \frac{0.7 - 0.6}{\sqrt{\frac{(0.6)(0.4)}{100}}} = \frac{0.1}{0.04899} = 2.04$$

القرار: قيمة Z الجدولية ولمستوى معنوية 5% تساوي 1.645 وعليه يكون القرار كالاتي بما ان القيمة المحسوبة لـ Z اكبر من القيمة الجدولية وعليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة وبذلك نستنتج ان مستوى الرامي قد تحسن وان اصابته للهدف لم تكن مجرد صدفه وبمستوى ثقة 95%.



(2)اختبار الفروق بين نسبتين:

يستخدم هذا الاختبار عندما نرغب بمعرفة الفرق بين نسبتين لعينتين مستقلتين .

- **فرضية الاختبار : لتكن P_1 و P_2 تمثل نسبتي العينتين الاولى والثانية على التوالي فان فرضية الاختبار يمكن صياغتها بإحدى الصورتين الاتيتين :**

1-

- **$H_0 : P_1 - P_2 = 0$ فرضية العدم**

ضد الفرضية البديلة

$H_1 : P_1 - P_2 \neq 0$

او $H_1 : P_1 - P_2 > 0$
او $H_1 : P_1 - P_2 < 0$

2-

- **$H_0 : P_1 - P_2 = d$ فرضية العدم**

ضد الفرضية البديلة

$H_1 : P_1 - P_2 \neq d$
او $H_1 : P_1 - P_2 > d$
او $H_1 : P_1 - P_2 < d$

حيث d تمثل مقدار معين .

- **احصاء الاختبار :**

يجرى الاختبار على الإحصائيتين الاتيتين الناتجتين من تقريب توزيع ثنائي الحدين من التوزيع الطبيعي .

فنستخدم لاختبار الفرضية رقم (1)

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}.\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

ونستخدم لاختبار الفرضية رقم (2)

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - d}{\sqrt{\left(\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}\right)}}$$

حيث ان :

Z: احصاءة الاختبار التي تتوزع توزيعا طبيعيا قياسيا .

$\widehat{P}_1$: تمثل نسبة النجاح في العينة الاولى .

$\widehat{P}_2$: تمثل نسبة النجاح في العينة الثانية.

وتحسب كلتا النسبتين كالاتي : $\widehat{P}_i = \frac{Y_i}{n_i}$, i= 1,2

$\widehat{P}$: معدل نسبة النجاح للعينتين وتحسب كالاتي :

$$\widehat{P} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2}$$

$\widehat{q}$: تمثل نسبة الفشل للعينتين $\widehat{q} = 1 - \widehat{P}$

n1 : عدد مفردات العينة الاولى ، n2: عدد مفردات العينة الثانية

- **اجراءات الاختبار**

1- صياغة فرضية الاختبار .
2- استخراج معالم الاحصاءة ومن ثم حساب احصاءة الاختبار .
3- مقارنة احصاءة الاختبار مع القيمة الجدولية لـ Z(جدول Z) .

- **قاعدة القرار :**

اذا كانت القيمة المحسوبة اكبر من القيمة الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل البديلة .

مثال :

عينة عشوائية مكونة من 200 رجل و 100 أمرأه ، وجد ان (19) رجلا يشكو ممن مرض قرحة المعدة فيما بلغ عدد النساء المصابات بنفس المرض (5) فقط ، اختبر الفرضية القائلة بأن هناك اختلاف بين الرجال والنساء فيما يخص الإصابة بهذا المرض لمستوى معنوية 5%.

الحل :

$n_1 = 200$, $y_1 = 19$; $n_2 = 100$, $y_2 = 5$

$\widehat{P}_1 = \frac{19}{200} = 0.095$; $\widehat{P}_2 = \frac{5}{100} = 0.05$

فرضية الاختبار $H_0 : P_1 - P_2 = 0$

$H_1 : P_1 - P_2 \neq 0$

$$\hat{P} = \frac{19+5}{200+100} = \frac{24}{300} = 0.08$$
$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}.\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{0.095-0.05}{\sqrt{(0.08)(0.92)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{100}\right)}} = \frac{0.045}{0.033} = 1.36$$

القرار: قيمة Z الجدولية وبمستوى معنوية $\alpha/2 = 0.025$ وتساوي 1.96
نجد ان القيمة المحسوبة هي اصغر من القيمة الجدولية لذا نقبل فرضية العدم القائلة بعدم وجود اختلاف ما بين الجنسين فيما يخص الاصابة بمرض قرحة المعدة .

مثال: من بيانات المثال السابق ، اختبر الفرض القائل بان نسبة الاصابة للرجال تزيد على نسبة الاصابة عند النساء بمقدار 2% وبمستوى معنوية 99%.

الحل :

$H_0 : P_1 - P_2 = 0.02$ فرضية الاختبار
$H_1 : P_1 - P_2 > 0.02$
$\hat{P}_1 = 0.095$; $\hat{P}_2 = 0.05$
$\hat{q}_1 = 1 - \hat{P}_1 = 0.905$; $\hat{q}_2 = 1 - \hat{P}_2 = 0.95$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - d}{\sqrt{\left(\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}\right)}} = \frac{(0.095-0.05)-0.02}{\sqrt{\frac{(0.095)(0.905)}{200}+\frac{(0.05)(0.95)}{100}}}$$

$$= \frac{0.025}{\sqrt{0.00043+0.0000475}} = \frac{0.025}{0.030} = 0.83$$

قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 0.01 تساوي 2.33

القرار:

نجد ان القيمة المحسوبة اقل من القيمة الجدولية وعليه نقبل فرضية العدم ونرفض البديلة .

اختبار الارتباطات

- **اختبار معنوية معامل الارتباط البسيط**

لتكن $i = 1,2,.....n$; (X,Y) تمثل ازواج من القيم التي تم الحصول عليها من عينة من المفردات قوامها (n) وان r_{xy} يمثل معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين Y,X ، وبافتراض ان هذه العينة تم اختيارها من مجتمع طبيعي ثنائي ، فلو كنا بصدد اختبار معنوية معامل الارتباط البسيط فهذا يعني اننا نرغب باختبار الفرضية القائلة بان معامل الارتباط في المجتمع المذكور انفا (ρ) هو مساو للصفر ضد اي فرضية بديلة اخرى ، بمعنى اخر نحن نرغب باختبار الفرضية :

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho = 0$

$\rho > 0$

$\rho < 0$

فان معيار الاختبار في هذه الحالة هو :

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \sim t_{(n-2)}$$

حيث ان :

t: احصاءة الاختبار تتوزع توزيع t بدرجة حرية (n-2) .

r_{xy} : معامل الارتباط

$$r_{xy} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$$

$$r_{xy} = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}}$$

- **اجراءات الاختبار**
  1- صياغة فرضية الاختبار
  2- حساب معامل الارتباط وإحصاءه الاختبار
  3- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية لاحصاءة الاختبار t.
- **القرار :** اذا كانت t المحسوبة اكبر من الجدولية نرفض H_0 ونقبل H_1

مثال : -

اذا علمت ان معامل الارتباط بين المتغيرين (وزن الاباء =X) والمتغير(وزن الابناء Y) ويساوي (0.70) لعينة مكونه من 12 اب واكبر الابناء ، والمطلوب/اختبر الفرضية $H_0:r=0$ ولمستوى معنوية 5% او بمعنى اخر اختبر معنوية معامل الارتباط بينهما ؟

الحل : $H_0 : \rho = 0$; $H_1: \rho \neq 0$

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{(0.70)\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0.70)^2}} = \frac{2.21}{0.714} = 3.1$$

قيمة t الجدولية وبدرجة حرية (n-2=10) وبمستوى معنوية α/2 = 0.025 تساوي

$t_{c(10,\ 0.025)} = 2.23$

القرار: بما ان قيمة t المحسوبة اكبر من الجدولية لذا نرفض فرضية العدم ونقبل البديلة اي انه وجود ارتباط بين المتغيرين .

م.م علي عبد الزهرة حسن