ثانيا": اختبارات العينتين

يتم اعتماد هذه الاختبارات لغرض الوقوف على مدى وجود فرق حقيقي بين متوسطي مجتمعين لحالتين مختلفتين او مقارنة هذا الفرق مع مقدار معين يضعه الباحث لاختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين وهناك عدة حالات لهذه الاختبارات .

1- اختبار الفرق بين وسطين حسابيين لعينتين مستقلتين .

افرض ان $\bar{X}_1$ يمثل الوسط الحسابي لقياسات عينة عشوائية من المفردات قوامها n_1 مختارة من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 وان $\bar{X}_2$ يمثل الوسط الحسابي لقياسات عينه ثانية من المفردات قوامها n_2 مختارة من مجتمع طبيعي وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 وعلى فرض ان المجتمعين مستقلين عن بعضهما واننا بصدد اختبار الفرضية :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \gamma$

ضد اي فرضية بديلة اخرى

- $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- $\mu_1 - \mu_2 > 0$
- $\mu_1 - \mu_2 < 0$

- حيث ان
- γ تمثل الفرق بين متوسطي المجتمعين

وهناك حالتين عندما يكون التباين للمجتمع معلوم او غير معلوم

1- اذا كان تباين المجتمعين σ_1^2 وσ_2^2 معلومين فان معيار الاختبار الملائم هو :

$$Z = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

فاذا كان الاختبار هو لتساوي وسطين حسابيين فان فرضية العدم سوف تصاغ بالشكل التالي

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

ومعيار الاختبار سوف يكون :

$$Z = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

2- اذا كان تباين المجتمعين غير معلوم

(A)عندما يكون حجم العينتين كبيرا $n \geq 30$ فان معيار الاختبار يصبح كالاتي :-

$$Z = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

حيث ان S_1^2 و S_2^2 يمثلان تباين العينة الاولى والثانية على التوالي وهما تقديران غير متحيزان .

(B) عندما يكون حجم العينتين صغيرا سوف تظهر حالتين ($n_1, n_2 \leq 30$).

1- <u>عندما يكون تباين المجتمعين متساويين علما انهما غير معلومين (سوف نفرض انهما متجانسين)</u>

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

فان معيار الاختبار في هذه الحالة :

$$t = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu 1-\mu 2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n1+n2-2)}$$

حيث ان:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \quad ; \quad S_p = \sqrt{S_p^2}$$

ويسمى بالتباين التجميعي (المشترك)

$$S_1^2 = \frac{\sum(X_{i1}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$$

$$S_2^2 = \frac{\sum(X_{i2}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$$

ويتم مقارنة قيمة المعيار المحسوبة مع الجدولية بمستوى معنوية محدد ودرجة حرية $(n1+n2-2)$

2- عندما نفترض ان تباين المجتمعين غير معلومين وغير متساويين فيصبح معيار الاختبار

$$t = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu 1-\mu 2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

وتقارن القيمة المحسوبة مع الجدولية بمستوى معنوية محدد ودرجة حرية تحسب وفق الصيغة التالية :

$$d.f = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2}}$$

مثال 1: - استخدمت احدى المعامل الانتاجية طريقة جديدة لإنتاج جهاز معين علما ان هناك معمل اخر له الظروف ذاتها ينتج الجهاز نفسه ، اراد احد المهندسين اختبار تأثير هذه الطريقة الجديدة على سرعة الانتاج بمستوى معنوية 5% وان المعلومات المتوفرة عن المجتمعين تتلخص بان كليهما يتوزع توزيعا مقاربا للتوزيع الطبيعي وان التباين في المعمل الاول المستخدم الطريقة الجديدة يساوي ($\sigma^2 = 2$) والتباين في المعمل الثاني المستخدم للطريقة التقليدية بلغ ($\sigma^2 = 3$) وقام مهندس الانتاج بحساب متوسط مدة الانتاج لعينة بحجم (18) جهاز من المجتمع الاول وكان 26 ساعة ومتوسط عينة اخرى بحجم 24 جهاز من المجتمع الثاني كان 27 ساعة ؟

الحل :-

1- فرضية الاختبار

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2- احصاءة الاختبار

المجتمعين يتوزعان توزيعا مقاربا للطبيعي وتباينهما معلومين .

$$Z = \frac{(\bar{X}1 - \bar{X}2) - (\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(26-27)-0}{\sqrt{\frac{2}{18}+\frac{3}{24}}} = \frac{-1}{0.4859} = -2.06$$

3- نستخرج القيمة الجدولية لــ (z) *ولمستوى معنوية* (α=0.05) *من* جدول التوزيع الطبيعي فنجد انها تساوي Z= 1.645

4- القرار : يتم مقارنة القيمة المطلقة لـ Z المحسوبة مع القيمة الجدولية *وبمستوى معنوية* 5% *فنجد ان :* *Z* المحسوبة اكبر من الجدولية وبذلك نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة اي ان: هناك فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين
اي ان الطريقة الجديدة ساهمت بمستوى ثقة *0.95 %* بتقليل المدة اللازمة للإنتاج .

مثال2:

رغب احد الباحثين قياس تأثير مادة عضوية في زيادة وزن نوع معين من الحيوانات حيث قام باختيار عينة بحجم (n_1 = 80) من مجتمع خاص لهذه الحيوانات وادخل المادة العضوية في تغذيتها واحتسب الوسط الحسابي والتباين لوزن الحيوان وكان (2.5) كغم و (1.4) كغم على التوالي ،وتم اختيار عينة اخرى بحجم (n_2 =60) من مجتمع اخر له نفس الظروف واحتسب الوسط الحسابي والتباين لأوزانهم وكان (2) كغم و (1.5) كغم على التوالي ، هل يمكن للباحث ان يستنتج بان استخدام المادة العضوية في تغذية الحيوان يؤدي الى زيادة في وزنه بمستوى معنوية 0.01 ؟

الحل :

1- فرضية الاختبار

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

2- احصاءة الاختبار

لدينا معلومات تشير الى ان المجتمعين كبيرين وتباينهما غير معلومين

$$\bar{X}1 = 2.5 \;;\; \bar{X}2 = 2 \;;\; S_1^2 = 1.4 \;;\; S_2^2 = 1.5$$

$$Z = \frac{(\bar{X}1 - \bar{X}2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{2.5 - 2}{\sqrt{\frac{1.4}{80} + \frac{1.5}{60}}} = \frac{0.5}{0.206} = 2.43$$

3- نجد قيمة *Z* الجدولية بمستوى معنوية *0.01* وتساوي Z= 2.33

4- القرار بمقارنة القيمة المحسوبة لـ (Z) مع الجدولية نجد ان :

قيمة *Z* المحسوبة اكبر من الجدولية وعليه نرفض فرضية العدم *(H₀)* ونقبل *H₁* وذلك يعني ان استخدام المادة العضوية في تغذية الحيوان يؤدي الى زيادة في وزنه بمستوى ثقة *99%*.

مثال3 :

في دراسة معينة لبيان الفروق بين متوسطي اوزان الذكور والاناث في احد المراحل الدراسية في قسم الاحصاء وتم اختيار 11 فرد من الذكور عشوائيا و *18* فرد من الاناث وتم الحصول على البيانات التالية

$$\bar{X}1 = 82 \;;\; \bar{X}2 = 73 \;;\; S_1^2 = 10 \;;\; S_2^2 = 7$$

علما ان الاوزان للمجتمعين يتوزع توزيع طبيعي وتباينهما غير معلومين ومن المعروف عنهما متساويين، هل تتفق هذه النتائج مع الفرض القائل ان متوسطي اوزان الذكور والاناث في هذه المرحلة الدراسية متساوية عند مستوى معنوية *0.05* .

الحل :

ان فرضيتا الاختبار الملائمة هنا هي :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Longrightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Longrightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

ومعيار الاختبار الملائم هو ,
$$t = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu1-\mu2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

حيث ان حجوم العينتين صغيرة والتباينات مجهولة:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(11-1)(10)+(18-1)(7)}{11+18-2} = \frac{219}{27} = 8.11$$

$$S_p = \sqrt{8.11} = 2.848$$

$$t = \frac{(82-73)-0}{(2.848)\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{18}}} = \frac{9}{(2.848)(0.38)} = \frac{9}{1.08} = 8.33$$

ومن جدول توزيع t وبدرجة حرية **$(n_1+n_2-2 = 11+18-2 = 27)$** ***ومستوى معنوية α/2 من طرفين ويساوي 0.025 نجد ان*** **$t_c(27, 0.025) = 2.052$** ***وبذلك يكون القرار:***

القيمة المحسوبة *(8.33)* اكبر من الجدولية *(2.052)* وعليه نرفض فرضية العدم ونقبل البديلة

اي ان متوسط اوزان الذكور مختلف عن متوسط اوزان الاناث في مجتمع الدراسة عند مستوى معنوية *0.05* .

مثال 4:

رغب احد التربويين معرفة اي الطريقتين افضل في تطوير مستوى الطالب ،الطريقة التقليدية التي تعتمد على *30%* منها على المختبر ام الطريقة الجديدة التي تعتمد *70%* منها على المختبر ، ولغرض التوصل الى قرار مناسب تم اختيار عينة من الطلبة بحجم *(n_1 =10)* وتم وضعهم في الصف *A* واختيار عينة اخرى بشكل مستقل بحجم *(n_2 =9)* ووضعهم في الصف *B* وبعد مدة زمنية اجرى امتحان قياسي موحد للصفين *A,B* كالاتي :

A	***85***	***70***	***60***	***75***	***65***	***75***	***78***	***77***	***65***	***80***
B	***70***	***85***	***90***	***65***	***75***	***85***	***80***	***88***	***82***	

اختبر لمستوى معنوية *0.05* .

الحل :

1- فرضية الاختبار

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

2- احصاءة الاختبار ان المعلومات تشير الى ان المجتمعين يتوزعان طبيعيا وتباينهما غير معلومين وغير متساويين وحجم العينة صغير .

كذلك يجب ان نحسب الوسط الحسابي والتباين لكلا المجموعتين *A,B* من البيانات المتوفرة

X1	X2	$\bar{X}_1^2$	$\bar{X}_2^2$
85	70	7225	4900
70	85	4900	7225
60	90	3600	8100
75	65	5625	4225
65	75	4225	5625
75	85	5625	7225
78	80	6084	6400
77	88	5929	7744
65	88	4255	6724
80	--	6400	--
730	720	53838	58168

$$\bar{X}_1 = \frac{730}{10} = 73 \; ; \qquad \bar{X}_2 = \frac{720}{9} = 80$$

$$S_1^2 = \frac{\sum(x_{i1}-\bar{X}_1)^2}{n1-1} = \frac{\sum X_{i1}^2 - \frac{(\sum X_{i1})^2}{n1}}{n1-1} = \frac{53838-\frac{(730)^2}{10}}{10-1} = 60.89$$

$$S_2^2 = \frac{\sum(x_{i2}-\bar{X}_2)^2}{n2-1} = \frac{\sum X_{i2}^2 - \frac{(\sum X_{i2})^2}{n2}}{n2-1} = \frac{58168-\frac{(720)^2}{9}}{9-1} = 71$$

ونطبق المعيار التالي:

$$t = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(73-80)-0}{\sqrt{\frac{60.89}{10}+\frac{71}{9}}} = \frac{-7}{3.7387} = -1.87$$

ولحساب درجات الحرية نستخدم الصيغة التالية :

$$d.f = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2}} = \frac{\left(\frac{60.89}{10}+\frac{71}{9}\right)^2}{\frac{(60.89/10)^2}{10}+\frac{(71/9)^2}{9}} = \frac{195.38}{10.62} = 18.39 \cong 18$$

***3-* نجد القيمة الجدولية لــ(t) من الجداول الخاصة وبمستوى معنوية 0.05 ولدرجة حرية (18) نجد انها**

$t_c(18 , 0.05) = 1.734$

***4-*القرار**

نقارن القيمة المطلقة للقيمة المحسوبة لـ *(t)* مع الجدولية فنجد انها اكبر من الجدولية وعليه نرفض فرضية العدم H_0 وبذلك نستنتج ان الطريقة الجديدة هي افضل من الطريقة التقليدية بمستوى ثقة *95%*.