اختبارات المتوسطات :

سنتناول في هذا الموضوع الاختبارات التي تتعلق بمتوسطات العينات عند معرفتنا لتوزيعاتها وسوف نتطرق لحالتين عندما يكون تباين المجتمع معلوما او غير معلوم وحول وسط حسابي واحد وحول وسطين حسابيين .

اولا": اختبارات العينة الواحدة .

1- اختبارات الوسط الحسابي عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما"

لتكن $X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_n$ تمثل قياسات مفردات عينة عشوائية تم اختيارها من مجتمع ذي توزيع طبيعي بوسط حسابي قدره μ وتباين σ^2 وليكن $\bar{X}$ و S^2 يمثلان الوسط الحسابي والتباين على التوالي لقياسات هذه العينة .

وعلى فرض اننا نرغب في اختبار الفرضية

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

حيث μ_0 تمثل قيمة معطاة ضد اي فرضية اخرى

فيكون معيار الاختبار

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0\,,1)$$

2- اختبارات الوسط الحسابي عندما يكون تباين المجتمع σ^2 غير معلوم

(أ) عندما يكون حجم العينة كبير [$n \geq 30$]

فيكون المعيار الملائم للاختبار هو :

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0\,,1)$$

حيث تم الاستعاضة عن (σ) بقيمة الانحراف المعياري للعينة (S) وكذلك اذا كان حجم العينة كبير ، حيث يكون (S^2) تقدير جيد لتباين المجتمع .

اجراءات الاختبار :

1- صياغة فرضية الاختبار
2- حساب احصاءة الاختبار
3- مقارنة الاحصاءة المحسوبة مع الجدولية لاتخاذ القرار.

قاعدة القرار:

اذا وقعت قيمة (z) المحسوبة في منطقة الرفض فأننا نرفض الفرضية الصفرية(العدم) والعكس بالعكس ، ويمكن تحديد منطقة الرفض اعتمادا على صيغ الفرضية البديلة وكالاتي :

1- $|Z| > Z_{\alpha/2}$
2- $Z > Z_{\alpha}$
3- $Z < -Z_{\alpha}$

ولتسهيل عملية استخراج القيم الجدولية(النظرية) ، فالجدول ادناه يوضح بعض القيم الحرجة لـ (Z) والتي غالبا ما تستخدم لكل من الاختبارات من طرف واحد او من طرفين ولمستويات مختلفة من المعنوية .

مستوى المعنوية α / نوع الاختبار	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.002	0.001
طرف واحد	± 1.28	± 1.645	± 1.96	± 2.33	± 2.58	± 2.88	± 3.09
طرفين	± 1.645	± 1.96	± 2.24	± 2.58	± 2.81	± 3.09	± 3.29

(ب) عندما يكون حجم العينة صغير (اي اقل من 30 مفردة) n <30
فان معيار الاختبار الملائم هنا هو:

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{(n-1)}$$

حيث تتم مقارنة القيمة المستخرجة لمعيار الاختبار مع قيمة معيار الاختبار (t) الجدولية بدرجة حرية (n-1) ومستوى معنوية محدد ، ويكون القرار عندما تكون t المحسوبة في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 والعكس بالعكس وكالاتي :

1- $|t| > t_{\alpha/2}$
2- $t > t_{\alpha}$
3- $t < -t_{\alpha}$

مثال: ادعت احدى الشركات المنتجة لمادة كيمياوية معينة بان متوسط كثافة هذه المادة يزيد على 5 من الوحدات $(\mu > 5)$ علما بان التباين مقداره $(\sigma^2 = 4)$ ولغرض اجراء الاختبار لهذا المتوسط قام الباحث بسحب عينة من مجتمع المواد المنتجة (غير المحدود والمعبأ في قناني خاصة) بحجم خمسين مادة(n=50) وكان متوسطها $(\bar{X} = 5.4)$ فهل يمكن القبول بادعاء الشركة لمستوى معنوية 5%.

الحل :

1- فرضية الاختبار

$H_0 : \mu = 5$

$H_1 : \mu > 5$

2- حساب احصاءة الاختبار:

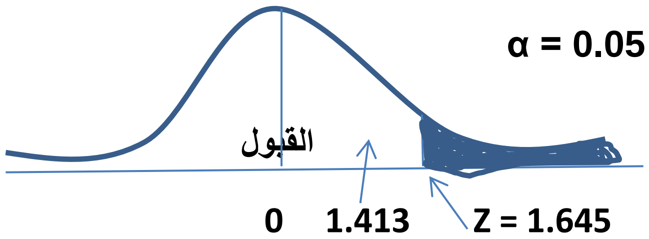
ان المعلومات المتوفرة لدينا التباين للمجتمع معلوم و $\bar{X} = 5.4$ و n = 50

اذن احصاءة الاختبار هي :

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.4-5}{2/\sqrt{50}} = 1.413$$

3- استخراج قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 5% نجد انها تساوي $(Z = 1.645)$

4- القرار بما ان Z المحسوبة وقعت في منطقة القبول لذا نقبل فرضية العدم والقائلة بان متوسط كثافة المادة المنتجة يساوي 5 وعليه يعتبر ادعاء الشركة غير مقبول .
(بمعنى اخر اذا كانت القيمة المحسوبة اقل من الجدولية لذا نقبل فرضية العدم)



مثال :- اجريت دراسة من قبل احد الباحثين حول متوسط اعمار المصابين بمرض تصلب الشرايين من خلال عينة بحجم 25 ، سحبت من مجتمع غير محدود وسطه الحسابي يساوي $(\mu = 60)$ وتباينه غير معلوم وتم حساب متوسط الاعمار للعينة وكان يساوي $(\bar{X} = 55)$ وانحرافه القياسي(المعياري) يساوي $(S=8)$ واراد الباحث اختبار متوسط العينة فيما اذا كان يختلف عن متوسط المجتمع بمستوى معنوية (0.05).

الحل:

1- فرضية الاختبار

$$H_0 : \bar{X} = 60$$

$$H_1 : \bar{X} \neq 60$$

2- احصاءة الاختبار وحسب المعلومات المتوفرة لدينا هي :

$$\alpha = 0.05 \;\; ; n = 25 \;\; ; \;\; \bar{X} = 55 \;\; ; \;\; \mu = 60 \;\; ; \;\; S = 8$$

التباين مجهول والعينة صغيرة نستخدم اختبار t.

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{55-60}{8/\sqrt{25-1}} = -3.062$$

3- نجد القيمة الجدولية للاحصاءة t من الجداول عند مستوى معنوية 5%
$[\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025]$ ودرجة حرية $d.f = n-1 = 24$ فنجد انها تساوي $(t = 2.064)$

4- نأخذ القيمة المطلقة للاحصاءة المحسوبة فنجد انها تساوي 3.064 وبذلك فان

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

فيكون القرار بما أن القيمة المحسوبة لـ t هي اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة ، اي ان متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع

مثال : في دراسة احصائية لمعرفة متوسطات المبيعات اليومي لتجارة احدى السلع الاستهلاكية في احدى المناطق وتم اختيار (10) مخازن عشوائيا حيث كانت مبيعاتها بإلاف الدنانير وكالاتي :

163 , 165 , 168 , 169 , 170 , 173 , 134 , 176 , 179 , 163

فاذا كان الانحراف المعياري للمبيعات هو (5) الاف دينار .

المطلوب// اختبر الفرض القائل بان متوسط المبيعات اليومي هو (169) الف دينار بمستوى معنوية قدره (0.05) .

الحل :

من المعطيات اعلاه نجد ان الانحراف المعياري معلوم σ=5

$H_0 : \mu = 169$

$H_1 : \mu \neq 169$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{163+165+\cdots+163}{10} = 166$$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{166-169}{5/\sqrt{10}} = -1.897$$

فان القيمة المطلقة لـ Z المحسوبة وتقارنها مع الجدولية .

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

القرار :

نجد ان القيمة المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5 % لذا نقبل فرضية العدم اي ان متوسط المبيعات اليومي للمجتمع يساوي 169 الف دينار .