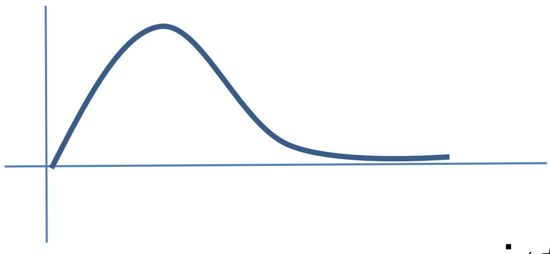
3- توزيع مربع كاي : Chi - Square Distribution

ويعتبر من التوزيعات الاحتمالية المستمرة التي لها اهمية كبيرة في التطبيقات الاحصائية والمنحنى لهذا التوزيع غير متماثل بل هو منحنى ملتو التواء موجب أي نحو جهة اليمين .



ان الدالة الاحتمالية التي تصف هذا المنحني هي :

$$f(x^2) = \frac{1}{(\frac{n}{2}-1)!\,2^{n/2}}\; e^{\frac{-1}{2}x^2}\; (x^2)^{(n/2)\,-\,1} \qquad ; \qquad 0 < x^2 < \infty$$

حيث ان (n) تمثل معلمة التوزيع ويطلق عليها (درجات الحرية للتوزيع) ويشار للتوزيع بشكل مختصر كما يلي : $X^2 \sim X^2_n$

خصائص التوزيع :

1- قيمة المتغير العشوائي هنا هي كمية موجبة دائما .
2- الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي في هذا التوزيع هي *(n)*.
3- ان تباين قيم المتغير العشوائي في هذا التوزيع هو *(2n)*.
4- اذا كانت $x_1\ , x_2\ , x_3 ,\dots\dots, x_k$ تمثل مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة بحيث ان :

$$X_i \sim N(\mu_i\, , \sigma^2_i) \qquad ; \quad i = 1 ,2 ,3 , \dots\dots\dots k$$

فأن كل واحد من هذه المتغيرات بقياسات هي $x_1\ , x_2\ , x_3 ,\dots\dots, x_{ni}$ ويمكن ان يحول الى قياسات تسلك وفق مربع كاي بدرجة حرية *ni* وهو ايضا متغير عشوائي يسلك على وفق دالة توزيع مربع كاي اي انه :

$$\sum_{i=1}^{k} X^2_{(ni)} \sim \sum_{i=1}^{k} X^2_{(\sum_{i=1}^{k} ni)}$$

5- اذا كان حجم العينة كبير اي ان *(n>30)* فان

$$Z = (\sqrt{2X^2} - \sqrt{2n-1}\ ) \sim N\,(0,1)$$

6- يمكن الاعتماد على جداول خاصة بهذا التوزيع في ايجاد قيم مربع كاي النظرية وعند مستوى معنوية محدد ودرجة حرية معينة .

استخدامات التوزيع :

1- اختبار يتعلق بتباين مجتمع.
2- اختبار حول تساوي عدة تباينات.
3- اختبار حسن المطابقة (جودة التوفيق).
4- اختبار الاستقلالية .

ملاحظة : لإيجاد قيمة الاحتمال المقابل لقيمة معينة وحسب جدول مربع كاي يجب ان تكون الصيغة كالاتي :

$$P(X^2 > X^2_{n,\alpha}) = \alpha$$

حيث ان α تمثل مستوى المعنوية (قيمة الاحتمال) .

مثال(1) : اذا كان المتغير العشوائي (x^2) يسلك وفق دالة توزيع مربع كاي x^2 بدرجة حرية (10) .

جد الوسط الحسابي والتباين ذاكرا الدالة الاحصائية، ثم اوجد $p(x^2 > 12.55)$ ، $p(x^2 < 20.48)$

$p(15.99 < x^2 < 29.59)$.

الحل : من المعلومات المتوفرة فأن $X^2 \sim X^2_{10}$

اي ان $n = 10$ وحيث ان الوسط الحسابي يمثل حجم العينة اي انه $\mu = n = 10$

وبالتالي فان التباين يساوي $2n$ $\sigma^2 = 2(10) = 20$

اما شكل الدالة سيكون:

$$f(x^2) = \frac{1}{(\frac{10}{2}-1)!2^{10/2}} e^{\frac{-1}{2}x^2} (x^2)^{(10/2)-1}$$

$$= \frac{1}{768} e^{\frac{-1}{2}x^2} (x^2)^4$$

اما القيم الاحتمالية فيمكن حسابها من خلال جداول توزيع مربع كاي عندما $n = 10$

$p(x^2 > 12.55) = 0.25$

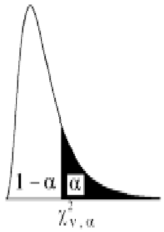
$p(x^2 < 20.48) = 1 - p(x^2 > 20.48) = 1 - 0.025 = 0.975$

$p(15.99 < x^2 < 29.59) = p(x^2 < 29.59) - p(x^2 < 15.99)$

$= [1 - p(x^2 > 29.59) - [1 - p(x^2 > 15.99)]$

$= p(x^2 > 15.99) - p(x^2 > 29.59)$

$= 0.10 - 0.001 = 0.099$



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v,\alpha}$

$P(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

توزيع ستيودنت : Student's t-distribution

ويعتبر من احد توزيعات المعاينة المهمة جدا والذي يستخدم عادة في الاختبارات الخاصة بحجوم العينات الصغيرة وان هذا التوزيع هو بالأساس مشتق من حاصل قسمة متغيرين مستقلين ، المتغير الاول الموجود في البسط وهو المتغير ذو توزيع طبيعي قياسي ، والمتغير الثاني الموجود في المقام ماهو الا الجذر التربيعي الموجب لمتغير ذو توزيع مربع كاي مقسوما على درجة حريته .

ويعرف المتغير العشوائي (t) بالشكل التالي :

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X^2}{n}}}$$

ويمكن التعبير عن هذا التوزيع بشكل مختصر كما يلي : $t \sim t(n)$ حيث n تمثل درجات الحرية

اما الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع فهي :-

$$f(t) = \frac{(\frac{n-1}{2})!}{\sqrt{\pi n}(\frac{n-2}{2})!}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(\frac{n+1}{2})} \quad ; \quad 0 < t < \infty$$

$$= 0 \qquad\qquad o.w$$

خصائص التوزيع :

1- الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي هو نفس الوسط الحسابي للمتغير $Z \sim N(0,1)$.
$\mu_t = 0$
2- اما تباينه فهو $(\frac{n}{n-2})$ بشرط ان يكون $n > 2$.
3- المنحنى الاحتمالي لتوزيع t هو منحنى متماثل حول النقطة (t=0)
4- درجات الحرية لهذا التوزيع هي نفس درجات حرية لتوزيع مربع كاي وهي n.
5- يمكن الاعتماد على جداول تخص هذا التوزيع للحصول على القيمة النظرية له وذلك عند مستوى معين من المعنوية ودرجة حرية محددة . علما:

1- $P(t > 0) = p(t < 0)$
2- $P(t > t_0) = p(t < -t_0)$
3- $P(t < -t_0) = 1 - p(t < t_0)$

مثال :- اذا علمت ان المتغير العشوائي t يسلك وفق دالة توزيع t بدرجات حرية تساوي 6 ، اكتب الدالة الاحتمالية واوجد قيمة التباين ثم اوجد $p(t > 3.707)$ و $p(t > -1.943)$.

الحل :

$$f(t) = \frac{(\frac{6-1}{2})!}{\sqrt{\frac{22}{7}(6)}(\frac{6-2}{2})!}\left(1+\frac{t^2}{6}\right)^{-(\frac{6+1}{2})}$$

اما التباين:

$$\frac{n}{n-2} = \frac{6}{6-2} = 1.5$$

- **P (t < -1.943) = 1- p(t < 1.943) = 1- 0.95 = 0.05**
- **P (t > 3.707) = 1- p(t < 3.707) = 1 -0.995 = 0.005**

****

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	**0.50**	**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
two-tails	**1.00**	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.002**	**0.001**
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

توزيع F: F – distribution

ان توزيع F مشتق من توزيعين مستقلين كل منهما يمثل توزيع مربع كاي وعليه يعتبر احد توزيعات المعاينة ويستند بالأساس على التوزيع الطبيعي وله استخدامات كثيرة في المجالات الاحصائية التطبيقية وبالذات في مجال تصميم وتحليل التجارب .

فعلى افتراض ان هناك متغيرين الاول هو $x_1^2 \sim x_{n1}^2$

والثاني هو $x_2^2 \sim x_{n2}^2$

فأن F يعبر عنها بالشكل التالي :

$$F = \frac{x_1^2/n1}{x_2^2/n2} \sim F(n_1, n_2)$$

اي ان المتغير العشوائي (F) يسلك وفق توزيع F بدرجة حرية هي n1 و n2 للبسط والمقام على التوالي ، اما الدالة الاحتمالية للمتغير F فهي : -

$$f(F) = \frac{(\frac{n1}{n2})^{\frac{n1}{2}} \left(\frac{n1+n2-2}{2}\right) F^{\frac{n1-2}{2}}}{\left(\frac{n1-2}{2}\right)!(\frac{n2-2}{2})! \quad (1+\frac{n1}{n2}F)^{\frac{n1+n2}{2}}} \qquad 0 < F < \infty$$

بعض خصائص توزيع F:

1- الوسط الحسابي لقيم F هو $\frac{n2}{n2-2}$ بشرط $n_2 > 2$.

2- التباين لقيم F هو $\frac{2n_2^2\,(n1+n2-2)}{n1(n2-2)^2(n2-4)}$ بشرط $n2 > 4$.

3- يمكن الاعتماد على جداول خاصة بهذا التوزيع للحصول على قيم نظرية وذلك عند مستوى معنوية محدد ودرجة حرية معينة للبسط ودرجة حرية معينة للمقام .

مثال : اذا علمت ان المتغير العشوائي F يسلك على وفق توزيع F بدرجات حرية 4 و 6 للبسط والمقام على التوالي ، حدد شكل الدالة الاحتمالية ثم اوجد الوسط الحسابي والتباين وجد قيمة P(F>4.53).

الحل:

$$f(F) = \frac{(\frac{4}{6})^{\frac{4}{2}} \left(\frac{4+6-2}{2}\right) F^{\frac{4-2}{2}}}{\left(\frac{4-2}{2}\right)!\,(\frac{6-2}{2})! \quad (1+\frac{4}{6}F)^{\frac{4+6}{2}}}$$

اما الوسط الحسابي فهو :

$$\mu_x = \frac{n2}{n2-2} = \frac{6}{6-2} = 1.5$$

$$\sigma^2 = \frac{2n_2^2\ (n1+n2-2)}{n1(n2-2)^2(n2-4)} = \frac{2(6)^2(4+6-2)}{4(6-2)^2(6-2)} = \frac{(2)(36)(8)}{(4)(16)(2)} = \frac{9}{2} = 4.5$$

وان قيمة الاحتمال P(F>4.53) تستخرج من الجدول الخاص بالتوزيع

P(F > 4.53) = 0.05

****