بعض التوزيعات المستمرة المهمة في المجال الحيوي(التوزيع الطبيعي, مربع كاي ، F ، T)

1- التوزيع الطبيعي : Normal Distribution

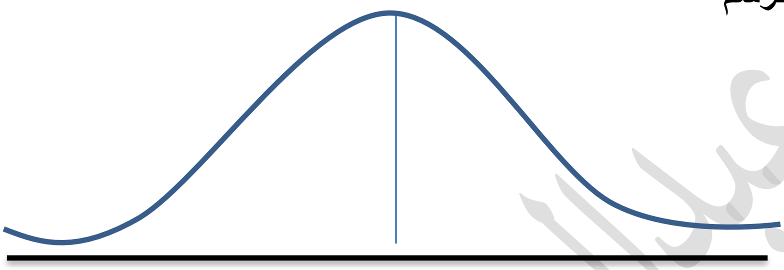
وهو التوزيع الاهم في مجال الاحصاء وان صيغة هذا التوزيع نشرت لأول مرة بواسطة العالم ابرهام عام 1935 وقد ساهم الكثير من الاحصائيين في تاريخ التوزيع الطبيعي ومن ضمنهم العالم Gauss والذي غالبا ما يدعى التوزيع بأسمه .Gaussian dist وان دالة التوزيع الطبيعي تكتب بالصيغة التالية :- σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma 2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty \;;\; -\infty < \mu < \infty \;,\; \sigma^2 > 0$$

$$= 0 \qquad o.w \qquad \text{عدا ذلك}$$

$$\pi = 3.14 \;,\; e = 2.178$$

ويأخذ شكل التوزيع الشكل الناقوسي في الرسم



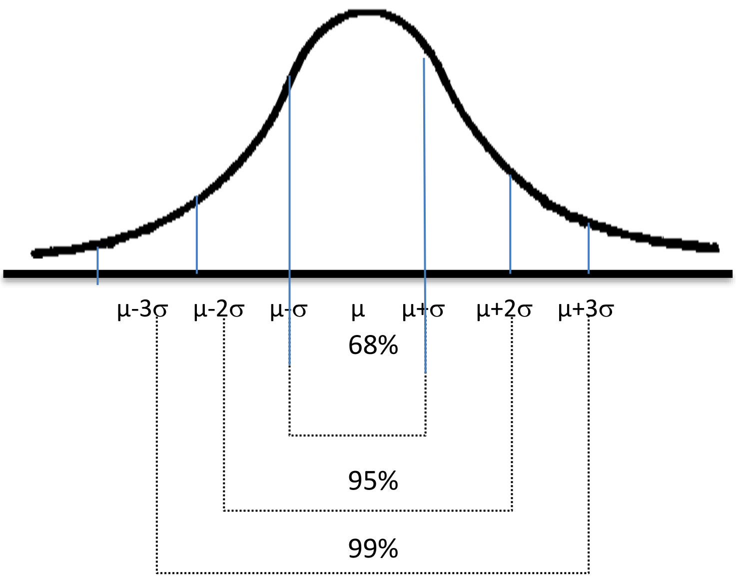
μ

خواص التوزيع الطبيعي :

1- شكله يشبه الجرس وعليه فهو متماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي μ
2- التوزيع الطبيعي له قيمة واحدة وهذا طبعا يعطينا استنتاج بان له منوال واحد يساوي μ ويساوي الوسيط ايضا .

$$\mu = Mo = Me$$

3- يتقارب طرفا منحنى هذا التوزيع من الصفر عندما $X \sim +\infty$ و $X \sim -\infty$
4- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد .
5- من المساحة الكلية للتوزيع الطبيعي حسبت نسب معينة وفقا لعدد الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي وكما في الشكل الموضح ادناه .
   - عند البعد بانحراف معياري واحد (σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 68%.
   - عند البعد بانحراف معياري واحد (2σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 95%.
   - عند البعد بانحراف معياري واحد (3σ) تكون المساحة تحت المنحنى بنسبة 99%.
6- يتم تحديد التوزيع الطبيعي كليا بالمعلمات μ و σ^2



****

2- التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal distribution

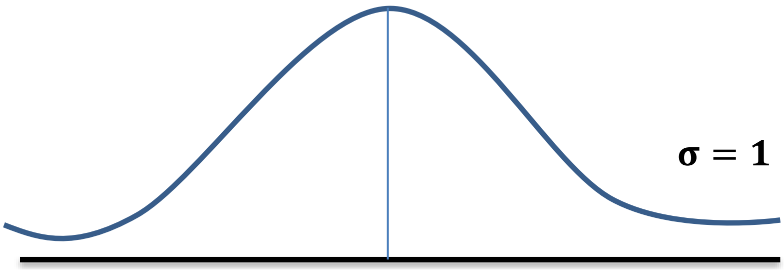
هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي يساوي صفر وتباينه يساوي واحد ($\sigma^2=1$, $\mu=0$)، فلو اسمينا المتغير Z على انه متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) فهذا يدل على انه توزيع المتغير Z هو التوزيع الطبيعي الذي معدله يساوي صفر وتباينه يساوي واحد($\sigma^2=1$, $\mu=0$) اي ان المعادلة او دالة التوزيع الطبيعي القياسي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < \infty$$

ويمكن الاعتماد على النظرية التي تقول اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2 فان توزيع المتغير العشوائي $Z=\frac{x-m}{\sigma}$ هو التوزيع الطبيعي القياسي بمعنى توزيع طبيعي بوسط حسابي صفر وتباين واحد.

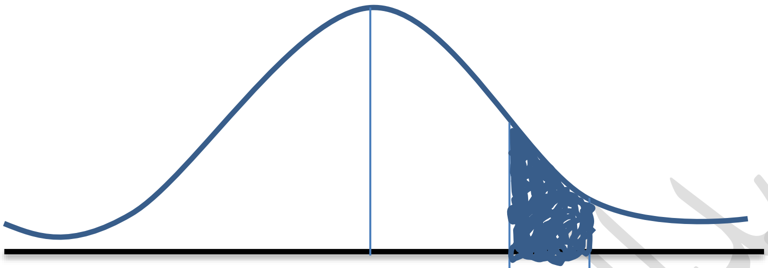
ونلاحظ ان هنا ان كل قيمة من قيم x يقابلها قيمة من قيم z حسب ما تم تعريفه اعلاه وتسمى قيم z القيم المعيارية او القياسية المقابلة لقيم x.

ويمكن ان يمثل التوزيع الطبيعي القياسي بالشكل التالي :



وان المساحة تحت المنحنى بين Z_0 و Z_1 يتم استخراجها باستخدام التكامل

$$\int_{Z0}^{Z1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}z2} \,.\, dz$$



ملاحظة : هناك جداول خاصة لحساب هذا التكامل وهو جدول التوزيع الطبيعي

ملاحظة :

1- $P(Z < a)$ الصيغة المعتمدة في ايجاد قيمة الاحتمال
2- $P(Z \geq a) = 1 - p(Z < a)$
3- $P(Z < -a) = 1 - p(Z < a)$
4- $P(Z > -a) = 1 - p(Z < -a)$
$= 1 - [1 - p(Z < a)] \qquad = P(Z < a)$

مثال : اذا كان x متغير عشوائي (يمثل اوزان الطلبة) له توزيع طبيعي
بمعدل $\mu = 62$ وتباين $\sigma^2 = 36$,
المطلوب // 1- حول المتغير x الى متغير طبيعي قياسي 2- اوجد القيم المعيارية المقابلة للقيم
$X_3 = 70$, $X_2 = 54$, $X_1 = 64$

الحل //

1- حسب النظرية فان Z هو المتغير العشوائي الذي توزيعه هو التوزيع الطبيعي القياسي ويكتب :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-62}{6}$$

-2 القيم المعيارية او القياسية المقابلة لقيم X تحسب كالاتي :

- القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_1 = 64$ هي :
- $Z_1 = \frac{64-62}{6} = \frac{2}{6} = 0.33$
- القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_2 = 54$ هي :
- $Z_2 = \frac{54-62}{6} = \frac{-8}{6} = -1.33$
- القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $X_3 = 70$ هي :
- $Z_3 = \frac{70-62}{6} = \frac{8}{6} = 1.33$

ملاحظة :

X يخض لتوزيع طبيعي بوسط μ وتباين σ^2 ويمكن التعبير عنه بـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Z يخضع لتوزيع طبيعي قياسي فيعبر عنه بـ $Z \sim N(0,1)$

امثلة //

مثال (1): اذا علمت ان المتغير Z له التوزيع الاتي : $Z \sim N(0,1)$

فأوجد $p(Z < 1.34)$ والتي تعني احتمال Z اقل من 1.34 او نسبة المساحة لـ $Z<1.34$

من الجدول الخاص نجد ان $p(Z < 1.34) = 0.90900$

مثال(2) : جد احتمال $p(Z > 1.22)$

$P(Z > 1.22) = 1 - P(Z \leq 1.22)$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z \leq 1.22) = 0.8888$ لذا فأن

$P(Z > 1.22) = 1 - 0.8888 = 0.1112$

مثال (3) : اذا علمت ان $Z \sim N(0,1)$ فاحسب $P(1.3 < Z < 2.4)$

الحل : $P(1.3 < Z < 2.4) = P(Z < 2.4) - P(Z < 1.3)$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z < 1.3) = 0.9032$ و $P(Z < 2.4) = 0.9918$ لذا فأن

$$P(1.3 < Z < 2.4) = P(Z < 2.4) - P(Z < 1.3)$$
$$= 0.9918 - 0.9032 = 0.0886$$

مثال(4) : اذا علمت ان $Z \sim N(0,1)$ فاحسب $P(Z < -1.94)$

$P(Z < -1.94) = 1 - P(Z < 1.94)$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z < 1.94) = 0.9738$ وبالتعويض نحصل على

$P(Z < -1.94) = 1 - 0.9738 = 0.0262$

مثال(5) : اذا علمت ان $Z \sim N(0,1)$ فاحسب $P(Z > -1.82)$

$P(Z > -1.82) = 1 - P(Z < -1.82)$

$= 1 - [\, 1 - P(Z < 1.82)\,] = P(Z < 1.82)$

ومن الجدول الخاص نجد ان $P(Z < 1.82) = 0.9656$

مثال(6) : اذا علمت ان $Z \sim N(0\,,1)$ فاحسب ما يلي :

1- $P(0 < Z < 2)$
2- $P(-2.55 < Z < 2.55)$
3- $P(-2.74 < Z < 1.53)$
4- $P(Z > 2.71)$
5- $P(0.84 < Z < 2.45)$

H –W

واجب بيتي

مثال 7 : افترض ان هناك اوزان لمجموعة من الطلاب تتوزع توزيع طبيعي بوسط (140) وانحراف معياري (25) فاذا تم اخذ شخص عشوائيا من هذه المجموعة فمت هو احتمال :

1- ان يكون وزنه بين 100 و 160 كغم .
2- ان يكون وزنه اقل من 160 كغم .
3- ان يكون وزنه اكثر من 180 كغم .
4- اذا افترضنا بأن هذه المجموعة هي 40 شخص ماهو عدد الاشخاص الذين يملكون وزن اقل من 170 كغم .

الحــــل :

نفرض ان اوزان هذه المجموعة هي متغير عشوائي X بحيث بـ $X \sim N(\mu\,, \sigma^2)$

1- $P(100 < X < 160) = P\left(\frac{100-140}{25} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(-1.6 < Z < 0.8)$

$= P(Z < 0.8) - P(Z < -1.6) = P(Z < 0.8) - [\,1 - P(Z < 1.6)\,]$

$= 0.7881 - [\,1 - 0.9452\,] = 0.733$

2- $P(X < 160) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-140}{25}\right) = P(Z < 0.8) = 0.7881$

3- $P(X > 180) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{180-140}{25}\right) = P(Z > 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6)$

$= 1 - 0.9452 = 0.0548$

4- $P(X < 170) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{170-140}{25}\right) = P(Z < 1.2)$

$= 0.8849$

$n * p(z < 170) = (40)(0.8849) = 35.39 \cong 35$ شخص وزنهم اقل من 170 كغم

جدول التوزيع الطبيعي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990