٨ـ الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة

يمكن تعريف معكوس الدوال الزائدية بدلالة الدالة اللوغاريتمية المعقدة كما كالتالي: اذا كان $z = \sinh w$ ، فأن

$$z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$$

افرض ان $e^w = v$ وبالتالي:

$$2z = v - \frac{1}{v}$$

$$v^2 - 2zv - 1 = 0$$

$$v = z + (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = z + e^{\frac{1}{2}ln(1+z^2)} = z + e^{\frac{1}{2}[ln|1+z^2|+iarg(1+z^2)]}$$

$$= z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}$$

من التعريف $v = e^w$ اعلاه

$$w = lnv = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

وبالتالي:

$$w = \sinh^{-1}z = ln\left(z + |1 + z^2|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}arg(1+z^2)}\right)$$

او يكون $\sinh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = \sinh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

وبنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع ان نثبت بأن:

$$w = \cosh^{-1}z = ln\left(z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}arg(z^2-1)}\right)$$

الدكتور موسى كاظم شامر   قسم الفيزياء ـ كلية التربية للعلوم الصرفة ـ جامعة البصرة

او يكون $cosh^{-1}z$ بالصيغة التالية:

$$w = cosh^{-1}z = ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

الان نعمل على ايجاد:

$$w = tanh^{-1} z$$

$$z = tanh\, w = \frac{sinh\, w}{cosh\, w} = \frac{\frac{e^w - e^{-w}}{2}}{\frac{e^w + e^{-w}}{2}} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$e^{2w} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$w = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

$$w = tanh^{-1} z = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

مثال: جد ناتج $cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) = ln\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= ln\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + i\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

الدكتور موسى كاظم شامر   **قسم الفيزياء ـ كلية التربية للعلوم الصرفة ـ جامعة البصرة**

$$cosh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = i\frac{2\pi}{3} \qquad , ln1 = 0$$

مثال: جد ناتج $cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل:

$$w = cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}ln\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}\left[ln\frac{1}{2} + i\tan^{-1}\left(\frac{0}{-\frac{1}{2}}\right)\right]}\right)$$

$$= ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\frac{1}{2}\left[ln\frac{1}{2} + i\pi\right]}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\left[ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{i\pi}{2}\right]}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

باستخدام تعريف دالة اللوغاريتم المعقدة

$$= ln\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) + i\tan^{-1}(1)$$

$$cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = i\frac{\pi}{4}$$

الدكتور موسى كاظم شامر   قسم الفيزياء ـ كلية التربية للعلوم الصرفة ـ جامعة البصرة

مثال: جد ناتج $tanh^{-1}(1 + 2i).$

الحل:

$$w = tanh^{-1}(1 + 2i) = \frac{1}{2} ln \left(\frac{1 + 1 + 2i}{1 - 1 - 2i} \right) = \frac{1}{2} ln(-1 + i) = \frac{1}{4} ln2 + i \frac{3}{8} \pi$$

من الدوال الزائدية المعقدة المعكوسة الاخرى هي

$$w = csch^{-1}z = ln \left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z} \right)$$

$$w = sech^{-1}z = ln \left(\frac{1 + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right)$$

$$w = coth^{-1} z = \frac{1}{2} ln \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

الدكتور موسى كاظم شامر   قسم الفيزياء ـ كلية التربية للعلوم الصرفة ـ جامعة البصرة