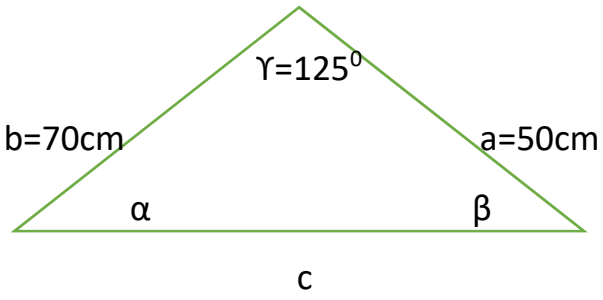
ملخص محاضرة العلاقات الهندسية للمثلثات (شرح وتعقيب) ....أعداد م.هدى داود نجم السعد

العلاقات الهندسية للمثلث غير قائم الزاوية:

1- قاعدة جيب تمام (حساب طول ضلع بمعلومية الضلعين الأخرين والزاوية التي ينهما):-

مثال1 / جد طول الضلع c أذا علمت أن :



B= 70 سم

A = 50 سم

الزاويه كاما Υ= 125⁰

يمكن من خلال المعطيات وأستخدام قاعدة جتا cos أستخراج طول الوتر c = ؟ بمعلومية ضلعين وزاويتهما :-

1- تطبيق القانون الضلع المجهول ² = الضلع المعلوم الاول ² + الضلع المعلوم الثاني² – 2 × الضلع الاول ×الضلع الثاني ×(جتا الزاوية المحصورة بينهما)

$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos \Upsilon)$

التطبيق يكون بالحاسبة العلمية مباشرة

2- بعد تحويل وكتابة القيم على القانون

$C^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \times 50 \times 70 (\cos 125)$

نبداء من يمين المعادله

أي كتابة 125 ثم ننقر cos ثم× 70 ×50×2 ثم يطرح من 7400 الذي هو حاصل ضرب(50×50 +70×70)

يكون الناتج – 11415.03505 (يكون الناتج سالب ...أن أجراء العملية بخطواتها على الورق يتيح المجال لظهور اشارتي السالب للطرفين في المعادلة ومن المعلوم ان السالب مع السالب يقلب العملية الى الموجب،وهنا وباستخام الحاسبة ننقر على الرمز+/- للتخلص من السالب) فيكون الناتج :-

$C^2 = 11415.03505$

$C = \sqrt{11415.03505} = 106.841$ cm

قمنا بجذر الرقم للتخلص من تربيع الوتر c= فيكون الناتج 106.841 سم

خطوات مهمه عند أستخدام الحاسبة(سواء حاسبة الهاتف أو الحاسبة العلمية):

لأستخراج أي عملية يكتب الرقم ثم العملية المراد تطبيقها :

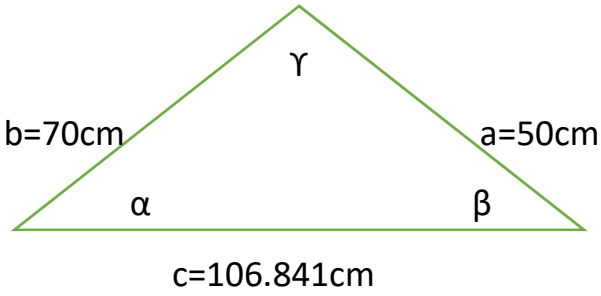
مثلا – (cos 125) نكتب الرقم 125 ثم ننقر على مختصر cos في الحاسبة فيكون الناتج -0.57357

- ومربع 50 مثلا أما الرقم في نفسه 50×50 أو نكتب 50 ثم ننقر x^2 فيكون الناتج 2500 .

- وكذلك عند أستخراج الجذر نكتب الرقم ثم ننقر على رمز الجذر المطلوب مرفوع للقوة 2 أو3 أو رقم أخر $\sqrt{\ }$ أو $\sqrt[3]{}$ ...الخ

يمكن تطبيق قاعدة جتا أيضا في اسخراج قيمة الزاوية المحصورة بين الضلعين أذا كان هي مجهوله...

مثل2 / على فرض أن الزاويه كاما ϒ هي مجهوله في المثال السابق وأن طول الضلع a= 50 سم و الضلع b= 70 سم والوتر c= 106.841 سم (حسب ما أستخرج بالمثال الاول)



يمكن تطبيق المعادلة مع تغيير المطلوب وهو استخراج الزاويه ϒ: يكون التطبيق على الحاسبة وبالخطوات التالية:

1- كتابة القانون الذي تغير بحسب المطلوب $\cos\gamma=a^2+b^2-c^2/2xaxb$

حيث أن المطلوب هو اسخرج الزاويه كاما(ϒ)=الضلع aتربيع يجمع مع الضلعb تربيع – الضلع cتربيع ويقسم المجموع على مضروب 2xaxb

$\text{Cos } \gamma= 50^2+70^2_c^2/2x50x70$

$\cos\gamma= 7400^{(50x50+70x70)}_11415.99^{(106.841x106.841)}/7000^{(2x50x70)}$

هذه الارقام الصغيره هي للتدليل على الرقم المستخرج ومن اجل الفهم فقط.أذ يمكن كتابة الخطوة الاولى مباشره على الحاسبة واستخراج الرقم ،اشارة السالب مهمه كونها جائت من طرح الكبيرمن الصغير:

$\cos\gamma=-4014.99/7000$

= -0.57357

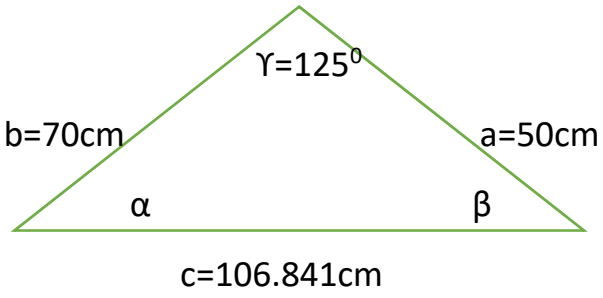
في هذه الحاله نحول الحاسبة عن طريق shift هذا في الحاسبات العلمية أو 2^{nd} في حاسبة الهاتف من أجل الوصول الى مختصر $\cos^{-1}$ وننقر عليه للحصول على الناتج :-

وهو 124.99 وبالتقريب = 125^0 أي ان الزاوية ϒ=125^0 وهي كما كانت في المثال الاول.

2- قاعدة الجيب (وتستخدم لحساب زاويه بمعلومية ضلعين وزاوية مقابله لاحدهما):حيث يمكن أن تكون علاقة جا sin بين الزاويه والضلع المقابل لها:

a/sinα =b/sinβ =c/sinϒ أي الضلع a مقسوم على جا الزاويه الفا α لانها مقابله له ويساوي الضلع b مقسوم على جا الزاويه بيتا β ويساوي الوتر c مقسوم على جا الزاويه كاماϒ.

في هذه الحالة يكون لدينا زاويه مجهولة وضلعين معلومين وزاويه معلومه تكون مقابله لاحد الضلعين.



مثل 3/في المثلث لدينا زاوية ألفا α مجهوله ولدينا معلومية الضلع المقابل لها a=50 cm والضلع c=106.841cm والزاويه كاماϒ=125^0

ستكون العلاقة بحسب المعطيات الموجودة :

a/sin α =c /sin ϒ

50 /sin α = 106.841/sin 125^0

هنا يكون التاكيد على المعطيات المعلومه للمثلث حيث إن المجهول الوحيد في هذه العلاقة هو الزاوية ألفاα وبحسب قاعدة حاصل ضرب الطرفين x تكون عملية التبادل للاطراف :

Sin α =50 x sin 125^0/106.841

Sin α =0.383350982

وبنفس الخطوات بالحاسبة نكتب 125 ثم sin ثم نضرب ×50 ونقسم على 106.841

0.383350982 $\sin^{-1}$

هنا خطوه مهمه وهي تكتب الناتج ثم ننقر $\sin^{-1}$ والذي يمكن أيجادة بعد تحويل الحاسبه (راجع الملاحظات السابقة الخاصة بتحويل الحاسبة) من أجل تحديد الزاويه

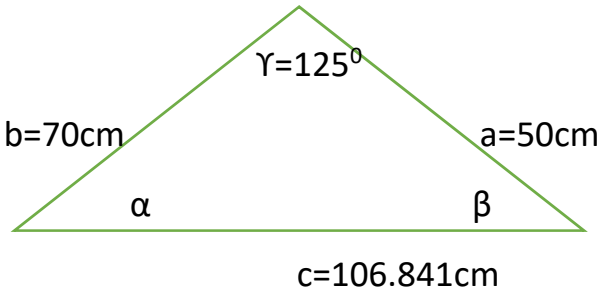
$= 22^0.541$

$0.541 \times 60 = 32'.46$

$0.46 \times 60 = 27''.6$

بعد أيجاد قيمة الزاوية ألفا α بحسب الخطوات اعلاه يمكننا وكما درسنا أيجاد الدقائق والثواني للزاويه بعد معرفة أن الزاويه من النظام الستيني. الزاويه α= $22^0\ 32'\ 27''$

3- المساحة :- في الهندسة الرياضية تمثل مساحة المثلث بقانون ½ ×القاعدة×الارتفاع ، والقاعدة هي أحد الاضلاع ، والارتفاع هو العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة أو على أمتدادها.وفي حال توفرت المعطيات كلها يمكن أستخراج المساحة.



عند النظر الى الشكل نلاحظ انه توجد اطوال الاضلاع لكن نحتاج الارتفاع

- بمعلومية أطوال الاضلاع : نحتاج هنا أيجاد نصف محيط المثلث والذي يستخرج عن طريق مجموع (أطوال اضلاعة الثلاثة) مقسومة على 2 :

$h=a+b+c\ /2$

$h= 50+70+106.841\ /2 = 113.4205$ cm

113.4205cm هذا يمثل نصف محيط المثلث

ثم تطبق المعادلة التالية لحساب مساحة المثلث وهي :

$A= \sqrt{h(h-a)(h-b)(h-c)}$

الجذر يشمل كل الاطراف وبما أن $h = 113.4205$

$A= \sqrt{113.4205(113.4205-50)(113.4205-70)(113.4205-106.841)}$

$A=1433.522cm^2$

مساحة المثلث .والمساحة تكون مربعة .

- يمكن أستخراج المساحة بمعلومية ضلعين والزاوية بينهما:

وهنا بحسب معطيات المثلث السابق أذا أعتبرنا أن قيمة الضلع c غير موجوده ولدينا فقط الضلع a و b والزاوية كاما٢ معلومين فيكون التطبيق كالاتي :

$A=1/2x\ a\ x\ b\ x\ \sin ٢$

(ملاحظة عند استخدام الحاسبة يمكن كتابة 0.5 بدل ½ فهما نفس القيمة وهذا لتسهيل الكتابة على الحاسبة لاتمام كتابة الارقام)

$A=1/2\ x50\ x70\ x\ \sin 125^0 = 1433.516\ cm^2$

وهي مقاربه للمساحة التي استخرجت بالخطوات التي قبلها(بمعلومية أطوال الاضلاع)

أرجوا قراءة هذا الملخص مع الملزمه لفهم العلاقات الهندسية للمثلثات غير القائمة الزاويه ،أذ تمثل كل الارقام التي تمثلت في الامثلة من أجل فهم كيفية تطبيق العلاقات (هي للشرح فقط).