تمارين (مادة الحلقات)

س1/ جد جميع الحلقات الجزئية مع نوعها لكل حلقة مما يأتي

① $(Z_{33}, +_{33}, \cdot_{33})$ - ② $(Z_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$ - $(Z_{24}, +_{24}, \cdot_{24})$

س2/ اذا كانت $(Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد جد Z_{12}^{*}

س3/ اذا كانت $(Z_8, +_8, \cdot_8)$ حلقة جد $2\cdot(3)$ ، $-2\cdot(3)$ ، $(\bar{7})^{-2}$

$2\in Z$, $(3)\in(Z_8, +_8, \cdot_8)$

س4/ لتكن $(M_{2\times2}(Z_3), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية على Z_3

جد مميزها.

س5/ بين الحلقة $(Z_e, +, \cdot)$ تكون حلقة بسيطة؟ لماذا

س6/ اعط مثال لحلقة مثالية رئيسية ولكن ليس حلقة تامة؟

① اعط مثال لحلقة مثالية رئيسية وحلقة تامة؟

② اعط مثال لحلقة تحتوي مثاليات فعلية فقط؟

③ اعط مثال لحلقة تبديلية ولا تحتوي عنصر محايد وحلقة ذات عنصر محايد وليست تبديلية

س7/ في الحلقة $(Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ والمثالية $(I, +_{12}, \cdot_{12})$ حيث ان $I=\{0,4,8\}$

اكتب جميع عناصر حلقة القسمة $(Z_{12}/I, +_{12}, \cdot_{12})$

س8/ لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة تامة، ولنرمز لمحايدها بـ 1 ولصفرها بـ 0 ولنفرض ان $x^2=x$ لكل x في R، بين ان $R=\{0,1\}$.

س9/ لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة، $(Z,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات محايد، الدالة المعرفة $g: Z\to R$ بحيث $g(n)=n\cdot 1$ لكل $n\in Z$ بين ان g تشاكل حلقي؟

س10/ لتكن $f: (Z,+,\cdot) \to (Z_e,+,\cdot)$ دالة معرفة $f(x)=2x$ لكل $x\in Z$ هل ان f تشاكل حلقي؟ بين ذلك.

س) لتكن $f:(\mathbb{Z}_5,+_5,\cdot_5)\to(\mathbb{Z}_{10},+_{10},\cdot_{10})$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=5x : \forall x\in \mathbb{Z}$
هل ان f تشاكل حلقي؟ بين ذلك.

س) اذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة بمحايد ولتكن $(R^*,+,\cdot)$ حلقة العناصر التي لها معكوس ولتكن $a\in R^*$ ، $f:R\to R^*$ دالة معرفة كالآتي $f_a(x)=a\cdot x\cdot a^{-1}$ ، هل ان f تشاكل حلقي؟ بين ذلك

س) جد جميع المثاليات في الحلقة $(\mathbb{Z}_{12},+_{12},\cdot_{12})$ ؟

س) اثبت ان $I=\{\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}: a,b\in \mathbb{Z}\}$ مثالية يمينية ولكنها ليست يسارية للحلقة $(M_{2\times2}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$

س) المجموعة $I=\{\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}, a\in \mathbb{Z}\}$ هي حلقة جزئية ولكنها ليست مثالية يمينية ولا يسارية للحلقة $(M_{2\times2}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$

س) لتكن $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة الاعداد الصحيحة، واذا كانت المثاليات $A=4\mathbb{Z}$ و $B=6\mathbb{Z}$ ، حقق النتيجة الثانية لمبرهنات التشاكل الاساسية

س) اعط مثال لحلقة تحتوي قواسم للصفر ثم برهن ان اذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد وان $a^{-1}\in R^*$ فان a لا يمكن ان يكون قاسماً للصفر.

س) اذا كانت R حلقة وان $a\in R$ عنصراً، عُرفت المجموعة $C(a)$ كالآتي
$$C(a)=\{x\in R : x\cdot a=a\cdot x\}$$
برهن ان $C(a)$ حلقة جزئية من R

س) اذا كانت R حلقة عُرفت المجموعة I كالآتي
$I=\{n\in \mathbb{Z} : n\cdot a=0, \forall a\in R\}$ برهن ان I مثالية للحلقة $\mathbb{Z}$ هل ان I مثالية رئيسية

س) $(R,+,\cdot)$ حلقة تبديلية اذا وفقط اذا كان
$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2 , \forall a,b\in R$.

س) أثبت ان المجموعة $(\mathbb{Z}_e,+,\cdot)\subseteq(\mathbb{Z},+,\cdot)$ مثالية للحلقة $(\mathbb{Z},+,\cdot)$