٦- دوال القوى المعقدة

تعرف الدالة الآسية العامة a^z ، $a \neq 0$ بالمعادلة:

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

وعندما $z = 0$، تكون $a^0 = 1$ وبخلافه فأن

$$ln\,a = ln|a| + i\,arg\{a\}$$

ويكون للدالة الآسية العامة متعددة القيم

$$a^z = e^{z\{ln|a| + i\,(\arg\{a\} + 2n\pi)\}}$$

مثال: اثبت ان

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[cos\left(\frac{ln(2)}{2}\right) + isin\left(\frac{ln(2)}{2}\right)\right]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $(1+i)^i$ على شكل

$$(1+i)^i = e^{i\,ln(1+i)} = e^{i(ln|a| + i\,arg\{a\})}$$

$$= e^{i\left\{ln\left(\sqrt{1^2+1^2}\right) + i\,tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)\right\}}$$

$$= e^{i\left\{ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}\right\}} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{iln(\sqrt{2})}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1+i)^i = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\left[cos\left(\frac{ln(2)}{2}\right) + isin\left(\frac{ln(2)}{2}\right)\right]$$

مثال: اثبت ان

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $2i^{(-2i)}$على شكل

$$= e^{-2i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+2^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)\right\}}$$

$$= e^{i\left\{ln(2)+i\frac{\pi}{2}\right\}} = e^{-\pi}e^{-2iln(2)} = e^{-\pi}e^{-iln(4)}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$2i^{(-2i)} = e^{\pi}[cos(ln(4)) - isin(ln(4))]$$

مثال: اثبت ان

$$(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}[cos(\pi) - isin(\pi)]$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\,ln\,a}$$

نعيد كتابة $(-i)^i$على شكل

$$= -e^{i\left\{ln\left(\sqrt{0^2+(-1)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right)\right\}}$$

$$= -e^{i\left\{ln(1)-i\frac{\pi}{2}\right\}} = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$$

مثال: اثبت ان

$$(1-i)^{4i} = \frac{\cos(\ln(4))}{e^{7\pi}} + i\frac{\sin(\ln(4))}{e^{7\pi}}$$

الحل:

باستخدام

$$a^z = e^{z\ln a}$$

نعيد كتابة $(1-i)^{4i}$ على شكل

$$= e^{4i\left\{\ln\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)+i\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)\right\}}$$

$$= e^{4i\left\{\ln(\sqrt{2})+i\frac{7\pi}{4}\right\}} = e^{\{4i\ln(\sqrt{2})-7\pi\}}$$

باستخدام صيغة اويلر نحصل على

$$(1-i)^{4i} = \frac{\cos(\ln(4))}{e^{7\pi}} + i\frac{\sin(\ln(4))}{e^{7\pi}}$$

٧- معكوس الدوال المثلثية المعقدة

يمكن تعريف معكوس الدوال المثلثية بدلالة اللوغاريتمات، لتعريف دالة معكوس دالة جيب للعدد العقدي z :

$$w = \sin^{-1} z$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه

$$z = \sin w$$

وبالتالي:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

الدكتور موسى كاظم شامر

قسم الفيزياء - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في e^{iw}

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

لنفرض ان $v = e^{iw}$ ونعيد كتابة المعادلة اعلاه، وبالتالي:

$$v^2 - 2izv - 1 = 0$$

باستخدام طريقة الدستور

$$v = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$v = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام $a^z = e^{z \ln a}$، نحصل

$$v = iz + e^{\frac{1}{2}ln(1-z^2)} = iz + e^{\frac{1}{2}[ln|1-z^2|+i\,arg\{1-z^2\}]}$$

$$v = iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg\{1-z^2\}}$$

باستخدام التعريف $v = e^{iw}$ واخذ اللوغاريتم

$$w = \frac{1}{i} lnv = \frac{1}{i} ln\left\{iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg\{1-z^2\}}\right\}$$

$$sin^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln\left\{iz + |1 - z^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}arg\{1-z^2\}}\right\}$$

او

$$sin^{-1} z = \frac{1}{i} ln\left\{iz + \sqrt{1 - z^2}\right\}$$

بنفس الطريقة (اختبر نفسك) نستطيع اثبات ان

$$\cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln\left\{z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} arg\{z^2-1\}}\right\}$$

او

$$\cos^{-1} z = w = \frac{1}{i} ln\left\{z + \sqrt{z^2 - 1}\right\}$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

$$w = \tan^{-1} z$$

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right)}$$

$$iz = \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\right)$$

$$iz\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب طرفي المعادلة اعلاه e^{iw} نحصل

$$iz\left(e^{2iw} + 1\right) = e^{2iw} - 1$$

نرتب المعادلة اعلاه

$$ize^{2iw} + iz = e^{2iw} - 1$$

$$ize^{2iw} - e^{2iw} = -1 - iz$$

$$(iz - 1)e^{2iw} = -1 - iz$$

نضرب طرفي المعادلة بـ i

$$-(z + i)e^{2iw} = -(i - z)$$

$$e^{2iw} = \frac{i-z}{z+i}$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$w = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

$$tan^{-1}z = w = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i-z}{z+i}\right)$$

مثال: اثبت ان

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

الحل:

$$sin^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left\{iz + \sqrt{1-z^2}\right\}$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{1}{i} ln\left(i2 + \sqrt{1-2^2}\right) = \frac{1}{i} ln(i2 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{i} ln(i2 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{i} ln[i(2+\sqrt{3})] = \frac{1}{i}[lni + ln(2+\sqrt{3})] = -i[lni + ln(2+\sqrt{3})]$$

$$= -ilni - iln(2+\sqrt{3}) = -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2+\sqrt{3})$$

$$= -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

$$sin^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} - iln(2+\sqrt{3})$$

مثال: اثبت ان

$$cos^{-1}(i) = \frac{\pi}{2} - iln(1+\sqrt{2})$$

الحل:

$$cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$cos^{-1}(i) = \frac{1}{i} ln\left(i + \sqrt{-1 - 1}\right) = \frac{1}{i} ln\left(i + i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{i} ln\left(i\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{i}\left[lni + ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] = -ilni - iln\left(1 + \sqrt{2}\right) = -i\left(ln1 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$= -i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) - iln\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{2} - iln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

مثال: اثبت ان

$$tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} ln3 + \frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$tan^{-1}z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - z}{z + i}\right)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i - 2i}{2i + i}\right) = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{-i}{3i}\right) = \frac{1}{2i} ln\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ln\left(\frac{1}{3}\right) + i\pi\right) = \frac{1}{2i}\left(ln(1) - ln(3) + i\pi\right) = \frac{1}{2i}\left(0 - ln(3) + i\pi\right)$$

$$tan^{-1}(2i) = \frac{-1}{2i} ln(3) + \frac{\pi}{2} = \frac{i}{2} ln(3) + \frac{\pi}{2}$$

من الدوال المثلثية المعقدة المعكوسة :

$$\csc^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)$$

$$\sec^{-1}(z) = \frac{1}{i} ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)$$

$$cot^{-1}z = \frac{1}{2i} ln\left(\frac{i + z}{z - i}\right)$$