من الخواص الاخرى ، اذا كان z_1 و z_2 عددين عقدين غير صفرين، حيث

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \ , \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

من السهولة ان نبرهن ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

$$lnz_1z_2 = \ln\left(r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}\right) = ln\left(r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) = lnr_1r_2 + i(\theta_1+\theta_2)$$

لتبسيط المعادلة اعلاه نستخدم

$$lnr_1r_2 = lnr_1 + lnr_2$$

وبالتالي

$$lnz_1z_2 = lnr_1 + lnr_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = (lnr_1 + i\theta_1) + (lnr_2 + i\theta_2)$$

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

وهي ليس لجميع القيم، فعلى سبيل المثال نفرض ان الصيغة الكارتزية لكل من z_1 و z_2 تعطى

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

و

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

نحاول اثبات ان

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

بالنسبة لطرف الايسر

$$lnz_1z_2 = ln\left(\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right) = ln(-4i)$$

$$lnz_1z_2 = l\,n(0-4i) = ln4 - \frac{\pi}{2}i \qquad\qquad r = 4, \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$lnz_1z_2 = ln4 - \frac{\pi}{2}i$$

بالنسبة الى الطرف الايمن

$$lnz_1 + lnz_2 = ln(-\sqrt{3} + i) + ln(-1 + i\sqrt{3})$$

$$= ln2 + i\frac{5\pi}{6} + ln2 + i\frac{2\pi}{3}$$

$$= 2ln2 + i\frac{3\pi}{2}$$

$$lnz_1 + lnz_2 = ln4 + i\frac{3\pi}{2}$$

نلاحظ ان

$$lnz_1z_2 \neq lnz_1 + lnz_2$$

لأثبات خلاف اعلاه، نكتب الطرف الايسر بشكل التالي:

$$lnz_1z_2 = ln4 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$lnz_1z_2 = ln4 + i\frac{3\pi}{2} \qquad , k = 1$$

وبالتالي نحصل

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

كذلك من الخواص الاخرى هي

$$ln\frac{z_1}{z_2} = lnz_1 - lnz_2$$

اثبت بنفس الاسلوب اثبات

$$lnz_1z_2 = lnz_1 + lnz_2$$

ايضاً من الخواص

$$ln\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}lnz \qquad n = 1,2, \dots, \dots,$$

لأثبات تلك العلاقة نتبع التالي: الصيغة القطبية للعدد العقدي تعطى بالشكل

$$z = r(cos\theta + isin\theta)$$

باستخدام تعميم الزاوية القطبية

$$z = r\big(cos(\theta + 2\pi k) + isin(\theta + 2\pi k)\big)$$

نجذر الطرفين بالنسبة الى m

$$z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}[cos(\theta + 2\pi k) + isin(\theta + 2\pi k)]^{\frac{1}{m}}$$

باستخدام نظرية دي موفر للطرف الايمن

$$= r^{\frac{1}{m}}\left(\left[cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right)\right]\right)$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة الآسية

$$z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{m}\right)}$$

من معادلة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي بالصيغة الآسية تكون المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$lnz^{\frac{1}{m}} = lnr^{\frac{1}{m}} + i\left(\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right) + 2\pi n\right)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}} = lnr^{\frac{1}{m}} + i\left(\frac{\theta + 2\pi k + 2\pi nm}{m}\right) = \frac{1}{m}\big(lnr + i(\theta + 2\pi q)\big) \qquad , q = (k + nm)$$

$$lnz^{\frac{1}{m}} = = \frac{1}{m}lnz$$

من الخواص الاخرى هي

$$e^{lnz} = z$$

حيث ان الطرف الايسر

$$e^{lnz} = e^{ln|z|+i\theta} = e^{ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

مثال: اثبت ان

$$\ln(-\ln(i)) = ln\tfrac{\pi}{2} - i\tfrac{\pi}{2}$$

الحل:

نقوم اولاً بحساب $\ln(i)$

$$ln(i) = ln(0+i) = lnr + i\theta$$

$$ln(i) = ln\sqrt{0^2+1^2} + i\,tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$ln(i) = ln(0^2+1^2)^{\frac{1}{2}} + i\,tan^{-1}(\infty)$$

$$ln(i) = \frac{1}{2}ln(0^2+1^2) + i\,tan^{-1}(\infty)$$

$$ln(i) = \frac{1}{2}ln(1) + i\frac{\pi}{2}$$

$$ln(i) = \frac{1}{2}0 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

ثانياً نقوم $\ln(-\ln(i))$

$$\ln\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - i\frac{\pi}{2} = ln\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\frac{1}{2}} - i\frac{\pi}{2}$$

$$\ln(-\ln(i)) = ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\frac{\pi}{2}$$

تمرين: اثبت ان

$$ln(1-i) = ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}$$

$$ln(-1+i) = ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}$$

ومن ثم اثبت

$$ln\big((1-i)(-1+i)\big) = ln(1-i) + ln(-1+i)$$

و

$$\ln\left(\frac{(1-i)}{(-1+i)}\right) = ln(1-i) - ln(-1+i)$$

من الخواص الاخرى هي

$$lnz^n = nlnz$$

وهي ليست بصورة عامة

مثال: اثبت ان

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln(1+i)^2 = ln(1+2i-1) = \ln(0+2i)$$

$$ln2i = ln(0^2+2^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)$$

$$ln2i = ln2 + i\tan^{-1}(\infty)$$

$$ln2i = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$2ln(1+i) = 2\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\frac{1}{1}\right]$$

$$= 2\left[ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{2}$$

$$= ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i\frac{\pi}{2}$$

$$2ln(1+i) = ln2 + i\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي:

$$ln(1+i)^2 = 2ln(1+i)$$

وهو المطلوب

مثال: اثبت ان

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

الحل:

بالنسبة للطرف الايسر

$$ln((-1+i)^4) = ln(((-1+i)^2)^2)$$

$$ln((1+i)^4) = ln((1-2i-1)^2) = ln((-2i)^2)$$

$$= ln(-4) = ln((-4)^2+0^2)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\left(\frac{0}{-4}\right)$$

$$ln((-1+i)^4) = ln(4) + i\pi$$

بالنسبة للطرف الايمن

$$4ln(-1+i) = 4\left[ln\sqrt{1^2+1^2} + i\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)\right]$$

$$= 4\left[ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 4ln\sqrt{2} + i3\pi$$

$$= 2ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + i3\pi$$

$$= 2ln2 + i3\pi$$

وبالتالي

$$ln((-1+i)^4) \neq 4ln(-1+i)$$

و هو المطلوب