٣- الدوال المثلثية الزائدية المعقدة

تعرف دالة الجيب الزائدية وجيب التمام الزائدية للمتغير العقدي z بالمعادلتين:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

اما بالنسبة لاشتقاقهما:

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = sinh\ z$$

$$\frac{d}{dz}sin\ z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos hz$$

لدالتين $\sinh z$ و $\cosh z$ خصائص مشابهة لما هي عليه كل من $\sin z$ و $\cos z$، نجمل بعضها بما يلي:

$$sinh\ z = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\ siny) - \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\ siny)$$

$$sinh\ z = cosy\frac{e^x - e^{-x}}{2} + i\ siny\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$sinh\ z = \sinh x\ cos\ y\ + i\cosh x\ sin\ y$$

وبطريقة مشابهة نجد

$$cosh\ z = \cosh x\ cos\ y\ + i \sinh x\ sin\ y$$

$$coshz = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}e^x(cosy + i\ siny) + \frac{1}{2}e^{-x}(cosy - i\ siny)$$

$$coshz = cosy\frac{e^x + e^{-x}}{2} + isiny\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعلى هذا يكون

$$cosh\, z = \cosh x\, cos\, y\ + i \sinh x\, sin\, y$$

$$cosh^2 z - sinh^2 z = 1$$

$$cosh^2 z - sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = 1$$

$$sinh(-z) = -\,sinh\, z$$

$$sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{+z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\,sinh\, z$$

$$cosh(-z) = cosh\, z$$

$$cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{+z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = cosh\, z$$

$$sinh(z_1 + z_2) = sinh\, z_1\, cosh\, z_2\ + cosh\, z_1\, sinh\, z_2$$

$$= sinh\, z_1\, cosh\, z_2\ + cosh\, z_1\, sinh\, z_2$$

$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \frac{e^{z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = sinh(z_1 + z_2)$$

بنفس الطريقة

$$cosh(z_1 + z_2) = cosh\, z_1\, cosh\, z_2\ + sinh\, z_1\, sinh\, z_2$$

$$|sinh\, z|^2 = sinh^2 x\ +\ sin^2\, y$$

$$sinh\, z = \sinh x\, cos\, y\ + i \cosh x\, sin\, y$$

$$|sinh\, z|^2 = |\sinh x\, cos\, y\ + i \cosh x\, sin\, y|^2$$

$$= \left(\sqrt{\sinh^2 x\, cos^2 y\ + \cosh^2 x\, sin^2 y}\right)^2$$

$$= \sinh^2 x\, cos^2 y\ + (1 + sinh^2 x) sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x\, cos^2 y\ + 1 sin^2\, y + sinh^2 x sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x\, (cos^2 y + sin^2\, y) + sin^2 y$$

$$|sinh\, z|^2 = \sinh^2 x + sin^2 y$$

$$sinh(iz) = i\, sin\, z$$

$$sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\, sin\, z$$

$$cosh(iz) = cos\, z$$

$$cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = cos\, z$$

اما الدوال الزائدية الاربع الاخرى، يتم تعريفها بطريقة مشابهة لنظائر ها من الدوال المثلثية، بحيث ان

$$coth\, z = \frac{cosh\, z}{sinh\, z}$$

$$tanh\, z = \frac{sinh\, z}{cosh\, z}$$

$$csch\, z = \frac{1}{sinh\, z}$$

$$sech\, z = \frac{1}{cosh\, z}$$

مثال: اثبت ان

$$sinh(z + i\pi) = -\, sinh\, z$$

الحل:

$$sinh(z+i\pi)=\frac{e^{(z+i\pi)}-e^{-(z+i\pi)}}{2}=\frac{e^{z}e^{i\pi}-e^{-z}e^{-i\pi}}{2}$$

$$=\frac{e^{z}(cos\pi+isin\pi)-e^{-z}(cos\pi-isin\pi)}{2}=\frac{e^{z}(-1+i0)-e^{-z}(-1-i0)}{2}$$

$$=\frac{-e^{z}+e^{-z}}{2}=-\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=-sinh\,z$$

بنفس الطريقة

$$cosh(z+i\pi)=-\cosh z$$

ومن اعلاه نستطيع ان نثبت

$$tanh(z+i\pi)=\frac{sinh(z+i\pi)}{cosh(z+i\pi)}=\frac{-\sinh z}{-\cosh z}=tanh\,z$$

مثال :اثبت ان

$$1-tanh^{2}z=sech^{2}z$$

الحل

$$cosh^{2}z-sinh^{2}z=\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{2}-\frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{2}=1$$

اذن

$$cosh^{2}z-sinh^{2}z=1$$

بالقسمة على $cosh^{2}z$ نحصل على

$$\frac{cosh^{2}z}{cosh^{2}z}-\frac{sinh^{2}z}{cosh^{2}z}=\frac{1}{cosh^{2}z}$$

$$1-tanh^{2}z=sech^{2}z$$

٤- دالة اللوغاريتم المعقدة

الصيغة الاسية للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$، فأن دالة اللوغاريتم الطبيعي له تكون:

$$lnz = ln\left(re^{i\theta}\right) = lnr + ln\left(e^{i\theta}\right) = ln\,r + i\theta$$

حيث lnr تمثل دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد الحقيقي الموجب r والذي يكون $r = |z|$ وان $\theta = \arg z$، لهذا فأن lnz دالة متعددة القيم للعدد العقدي غير الصفري z. اذا كان φ القيمة الرئيسية لـ $\arg z$ حيث $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ وبالتالي يمكن ان نكتب $\theta = \varphi + 2n\pi$ حيث ان $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \ldots$ ، لهذا يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصورة التالية:

$$ln\,z = ln\,r + i(\varphi + 2n\pi)$$

حيث تبين المعادلة اعلاه ان lnz هو دالة متعددة لقيم z وبعدد غير منته من قيم دالة اللوغاريتم، التي لها الجزء الحقيقي نفسه، اما الجزء الخيالي فيختلف بمضاعفات صحيحة من العدد 2π.

عندما $n = 0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم وتكتب بالشكل:

$$ln\,z = ln\,r + i\varphi \qquad r > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = 1 + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = arg\,z = tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$ln\,(1 + i) = ln\,\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

مثال: اوجد $\ln z$ اذا علمت بأن $z = \sqrt{3} + i$.

الحل:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$\varphi = arg\,z = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$ln\left(\sqrt{3} + i\right) = ln\,2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

مثال: اذا علمت بأن صيغة الآسية للعدد العقدي هي $z = re^{i\theta}$، اثبت ان

$$\frac{d}{dz} lnz = \frac{1}{z}$$

الحل:

صيغة الآسية للعدد العقدي هي:

$$z = re^{i\theta}$$

مشتقة صيغة الآسية للعدد العقدي هي:

$$dz = rie^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr = e^{i\theta}(ird\theta + dr)$$

$$\frac{dz}{e^{i\theta}} = ird\theta + dr \qquad (1)$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z تعطى:

$$lnz = \ln r + i\theta$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي للعدد العقدي z :

$$dlnz = \frac{dr}{r} + id\theta = \frac{1}{r}(ird\theta + dr)$$

باستخدام (1) تصبح المعادلة اعلاه

$$dlnz = \frac{1}{r}\frac{dz}{e^{i\theta}} =$$

$$\frac{d}{dz} lnz = \frac{1}{z}$$