٢- **الدوال المثلثية المعقدة:** تعرف الدوال المثلثية $\sin z$ و $\cos z$ والدوال الاخرى بدلالة الدالة الاسية للمتغير z كما يأتي:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \qquad (2)$$

من جمع المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

من طرح المعادلتين اعلاه نحصل على

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

بالنسبة الى تفاضل كل من $\cos z$ و $\sin z$ فيكون

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{ie^{iz} - (-ie^{-iz})}{2i} = i\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بالنسبة للدالة المثلثية المعقدة $\cos z$ يمكن بصيغة الرياضية التالية:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$$

حيث يمكن اثبات العلاقة اعلاه من خلال التالي:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z = x + iy$$

$$\cos z = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} \quad , \quad ii = -1 \quad , -ii = 1$$

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$\cos z = \cos x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$$

يمكن ايجاد القيمة المطلقة $\cos z$ بشكل التالي:

$$|cos\, z| = |cos(x+iy)| = |cos\, x\ coshy - i\, sinx\ sinh\, y|$$

$$= \sqrt{cos^2x\, cosh^2y + sin^2x\ sinh^2 y} \qquad , -ii = 1$$

$$= \sqrt{cos^2x(1+sinh^2y) + (1-cos^2x)\ sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{1cos^2x + cos^2x sinh^2y + 1\, sinh^2 y - cos^2x\ sinh^2 y}$$

$$|\cos z| = \sqrt{cos^2x + sinh^2 y}$$

كذلك الحال بالنسبة للقيمة المطلقة $sin\, z$ (اختبر نفسك)

$$|\sin z| = \sqrt{sin^2x + sinh^2 y}$$

الان نريد ان اثبت $sinz_1\, cosz_2 + cosz_1\, sinz_2 = \sin(z_1+z_2)$

$$sinz_1\, cosz_2 + cosz_1\, sinz_2 =$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2i\times 2}(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})\right] + \left[\frac{1}{2\times 2i}(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})\right]$$

$$= \frac{\left[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right] + \left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1+z_2)$$

بطريقة اخرى

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz_1}.e^{iz_2} - e^{-iz_1}.e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{[(cosz_1 + isinz_1)(cosz_2 + isinz_2)] - [(cosz_1 - isinz_1)(cosz_2 - isinz_2)]}{2i}$$

$$= \frac{[\cos z_1 \cos z_2 + \cos z_1 i\sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 i\sin z_2] - [\cos z_1 \cos z_2 - \cos z_1 i\sin z_2 - i\sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2]}{2i}$$

$$= \frac{\cos z_1 i\sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 i\sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2}{2i} = \frac{2i\cos z_1 \sin z_2 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{2i}$$

$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

بالنسبة لدالة المثلثية المعقدة ادناه

$$\tan z = \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right)$$

فيكون اثباتها من خلال

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i\sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin x \cosh y + i\cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i\sin x \sinh y} \cdot \frac{\cos x \cosh y + i\sin x \sinh y}{\cos x \cosh y + i\sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x \cosh^2 y + i\sin^2 x \cosh y \sinh y + i\cos^2 x \sinh y \cosh y - \cos x \sin x \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + i\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + i\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$= \left(\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right) + i\left(\frac{\cosh y \sinh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}\right)$$

الان نحاول ان نثبت ان

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

يكون ذلك من خلال

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix} - e^{ix} + 2e^{-ix} - e^{-3ix})$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left((e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} + e^{-ix})\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{(e^{3ix} - e^{-3ix})}{2i} - 3\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)\right)$$

$$= \frac{3sinx - sin3x}{4}$$

مثال: اثبت ان $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

الحل:

الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$sin\, z = sinx\, coshy + i\, cos\, x\;\; sinh\, y$$

في الطرف الايسر، المترافق المعقد لدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{sin\, z} = \overline{sinx\, coshy + i\, cos\, x\;\; sinh\, y} = sinx\, coshy - i\, cos\, x\;\; sinh\, y$$

يمكن كتابة الدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$:

$$sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

الطرف الايمن، المترافق المعقد لدالة المثلثية المعقدة $sin\, z$ في المعادلة اعلاه:

$$sin\, \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}}{2i} \qquad , z = x + iy$$

$$= \frac{(cosx + isinx)e^{y} - (cosx - isinx)e^{-y}}{2i} = \frac{(e^{y}cosx + e^{y}isinx) - (e^{-y}cosx - e^{-y}isinx)}{2i}$$

$$= \frac{e^{y}cosx + e^{y}isinx - e^{-y}cosx + e^{-y}isinx}{2i} = \frac{(e^{y} - e^{-y})cosx + (e^{y} + e^{-y})isinx}{2i}$$

$$= cosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2i} + isinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2i} = -icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2} + sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2} - icosx\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

$$= sinx\cosh y - icosx\sinh y$$

وبالتالي يتساوى الطرفين.

من المتطابقات الاخرى هي

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$1 + \tan^2 z = \sec^2 z$$

$$1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$

تمرين: اختبر نفسك لأثبات الاتي:

$$\sin z = sinx\,coshy + i\cos x\ \sinh y$$

$$sinz_1\,cosz_2 - cosz_1\,sinz_2 = \sin(z_1 - z_2)$$

$$cosz_1\,cosz_2 + sinz_1\,sinz_2 = \cos(z_1 + z_2)$$

$$cosz_1\,cosz_2 - sinz_1\,sinz_2 = \cos(z_1 - z_2)$$

$$\overline{\cos z} = \cos\bar{z}$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\tan(-z) = -\tan z$$

$$\cot(-z) = \cot z$$