المعايرة وعامل الطور **Normalization and phase factor**

$$\Psi_l = \Phi_l^0 + \lambda\Psi_l^1 \qquad \text{.......................(3-22)}$$

$$\Psi_l = \Phi_l^0 + \lambda\sum_n a_n\ \Phi_n^0 \qquad \text{...................... (3-23)}$$

$$\Psi_l = \Phi_l^0 + \lambda a_l\Phi_l^0 + \lambda\sum_{n\neq l} a_n\ \Phi_n^0 \qquad \text{...............(3-24)}$$

باستخدام العلاقة (3-19) نحصل على

$$\Psi_l = (1+\lambda a_l)\Phi_l^0 + \lambda\sum_{n\neq l}\frac{w_{m,l}}{E_l^0 - E_m^0}\ \Phi_n^0 \qquad \text{........... (3-25)}$$

حالة المعايرة للمعادلة (3-22) تعطي

$$<\Psi_l|\Psi_l> = 1 =<\ \Phi_l^0\ |\Phi_l^0> +\lambda\left[<\ \Phi_l^0\ \middle|\Psi_l^1> +<\Psi_l^1\middle|\Phi_l^0>\right] + \lambda^2[\ldots]$$

كل الحدود التي تحتوي λ^2 او اكثر تهمل لاننا نعمل ضمن المرتبة الاولى

$$1 = 1 + \lambda\left[<\ \Phi_l^0\ \middle|\Psi_l^1> +<\Psi_l^1\middle|\Phi_l^0>\right]$$

$$\left[<\ \Phi_l^0\ \middle|\Psi_l^1> +<\Psi_l^1\middle|\Phi_l^0>\right] = 0$$

ويمكن كتابتها بصيغة التكامل

$$\sum_n a_n\int(\Phi_l^0)^*\,\Phi_n^0\,dV + \sum_n a_n{}^*\int(\Phi_n^0)^*\,\Phi_l^0\,dV = 0$$

$$a_n\,\delta_{n,l} + a_n^*\,\delta_{n,l} = 0$$

$$a_l + a_l^* = 0$$

$$a_l = -a_l^*$$

وهذا يعني ان a_l معقد ويمكن في ضوء ذلك كتابته $a_l = i\gamma$ ، نستخدم العلاقة (17) اخذين بنظر الاعتبار ان $1 + i\gamma\lambda \approx \exp(i\gamma\lambda)$

$$\Psi_l = (1 + \lambda a_l)\Phi_l^0 + \lambda \sum_{n \neq l} \frac{w_{m,l}}{E_l^0 - E_m^0}\, \Phi_n^0 \qquad \text{.......... (3-26)}$$

$$\Psi_l = \Phi_l^0 e^{i\gamma\lambda} + \lambda \sum_{n \neq l} \frac{w_{m,l}}{E_l^0 - E_m^0}\, \Phi_n^0 \qquad \text{............(3-27)}$$

حالة التعامد $< \Psi_l \mid \Psi_{l'} > = \delta_{ll'}$

$e^{i\gamma\lambda}$ هو عامل طور وهذا يعني ان الاضطراب يغير طور الدالة الموجية كما في المعادلة (19)

سؤال:

استخدم حالة التعامد $< \Psi_l \mid \Psi_{l'} > = \delta_{ll'}$ لاثبات ان $\gamma = 0$ ؟

تصحيح اضطراب المرتبة الثانية للانظمة غير المنحلة

Second order perturbation correction for non-degenerate levels

يمكن كتابة المعادلة (3-17) بالشكل التالي

$$\left(w - E_l^1\right) \Psi_l^1 = E_l^2\, \Phi_l^0 \qquad \text{.............. (3-28)}$$

نضرب طرفي المعادلة من جهة اليسار بمرافق الدالة Φ_l^0 نم نجري عملية التكامل

$$< \Phi_l^0 (w - E_l^1)\, \Psi_l^2 >= E_l^2 < \Phi_l^0 | \Phi_l^0 >$$

$$E_l^2 = \frac{< \Phi_l^0 \left(w - E_l^1\right) \Psi_l^2 >}{< \Phi_l^0 | \Phi_l^0 >}$$

وأذا كانت الدالة Φ_l^0 معايرة يكون التصحيح الثاني بالطاقة

$$E_l^2 =< \Phi_l^0 \left(w - E_l^1\right) \Psi_l^2 > \qquad ....(3\text{-}29)$$

وباستخدام المعادلة (3-20) في المعادلة الاخيرة ينتج لدينا

$$E_l^2 =< \Phi_l^0 (w - E_l^1) \sum_{n \neq l} \frac{w_{n,l}}{E_l^0 - E_n^0} \Phi_n^0 >$$

$$E_l^2 = \sum_{n \neq l} \frac{w_{n,l}}{E_l^0 - E_n^0} < \Phi_l^0 |w| \Phi_n^0 > - E_l^1 | \sum_{n \neq l} \frac{w_{n,l}}{E_l^0 - E_n^0} < \Phi_l^0 | \Phi_n^0 >$$

وبما ان $n \neq l$ فان الحد الثاني يساوي صفر لذلك يتبقى لدينا

$$E_l^2 = \sum_{n \neq l} \frac{w_{n,l}}{E_l^0 - E_n^0} w_{ln}$$

$$E_l^2 = \sum_{n \neq l} \frac{|w_{n,l}|^2}{E_l^0 - E_n^0} \qquad .... (3\text{-}30)$$

وهذه النتيجة الاساسية لنظرية الاضطراب من المرتبة الثانية

وعليه تكون المعادلة (3-13) كالتالي

$$E_l \approx E_l^0 + \lambda w_{ll} + \lambda^2 \sum_{n \neq l} \frac{|w_{n,l}|^2}{E_l^0 - E_n^0} \qquad ....(3\text{-}31)$$

<u>مثال (5):</u>

سنعيد حل المثال الاول ولكن هنا المطلوب حساب الدالة الموجية ونص المثال الاول هو وضع جسيم $\Psi_n^0(x)$ في بئر جهد غير متناهي عرضه a في مركزه نتوء على شكل دالة دلتا $\alpha\delta(x - \frac{a}{2})$

وان α مقدار ثابت . جد التصحيح الاول في الدالة الموجية لاول حدين فقط ؟

الحل:

$\Psi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}\, x)$ هي الدالة الموجية وان الاضطراب $H' = \alpha\delta(x-\frac{a}{2})$.

ان التصحيح الاول للدالة يعطى بالعلاقة (12) وكالتالي

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \sum_m \frac{<\Psi_m^0(x)|H'|\Psi_n^0(x)>}{E_n^0 - E_m^0}\Psi_m^0(x)$$

هنا $n = 1$ لانها دالة الاستقرار لذلك نحتاج ان نجد $<\Psi_m^0(x)|H'|\Psi_1^0(x)>$

$$<\Psi_m^0(x)|H'|\Psi_1^0(x)> = \frac{2\alpha}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}\, x\right) \quad \delta(x-\tfrac{a}{2}) \quad \sin\left(\frac{\pi}{a}\, x\right)\, dx$$

$$= \frac{2\alpha}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\alpha}{a}\ \sin(\frac{m\pi}{2})$$

$$E_1^0 - E_m^0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(1-m^2)$$

$$\Psi_1^{(1)}(x) = \sum_m \frac{\frac{2\alpha}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{E_1^0 - E_m^0}\Psi_m^0(x)$$

اول حدين بالسلسلة يحققان المطلوب هما $m = 3,\ 5$ (راجع المثال الاول)

$$\Psi_1^{(1)}(x) = \frac{2\alpha}{a}\,\frac{2ma^2}{\pi^2\hbar^2}\left[\frac{-1}{1-9}\Psi_3^0(x) + \frac{1}{1-25}\ \Psi_5^0(x)\right]$$

$$\Psi_1^{(1)}(x) = \frac{\alpha\, m}{\pi^2\hbar^2}\ \sqrt{\frac{a}{2}}\ \left[\sin(\frac{3\pi}{a}x)\ - \frac{1}{3}\sin(\frac{5\pi}{a}x)\right]$$

وهذا يمثل مقدار التصحيح بالدالة الموجية.

مثال (6):

نظام كمي غير مضطرب وغير منحل له دالة موجية $|\Psi_n^0> = C|n>$ اذ ان $<n|n> = 1$ وان C مقدار ثابت حقيقي وموجب . يتعرض هذا النظام لاضطراب خارجي بحيث تصبح دالته الموجية

$|\Psi_n> = C|n> + \lambda\Psi_n^{(1)}> + \lambda^2|\Psi_n^{(2)}> + \cdots$. أجري عملية المعايرة على الدالة $|\Psi_n>$ واثبت ان $<n\left|\Psi_n^{(2)}\right> = -\frac{1}{2}<\Psi_n^{(1)}\middle|\Psi_n^{(1)}>$ اذا علمت ان $<n|\Psi_n^{(1)}>$ و $<n|\Psi_n^{(2)}>$ هي قيم حقيقية وكذلك $<n|\Psi> = <\Psi|n>^*$.

الحل:

من المعايرة $<\Psi_n|\Psi_n> = 1$

$$1 = \left[C|n> + \lambda|\Psi_n^{(1)}> + \lambda^2|\Psi_n^{(2)}> + \cdots\right]^*\left[C|n> + \lambda\Psi_n^{(1)}> + \lambda^2|\Psi_n^{(2)}> + \cdots\right]$$

$$1 = \left[C<n| + \lambda<\Psi_n^{(1)}| + \lambda^2<\Psi_n^{(2)}| + \cdots\right]\left[C|n> + \lambda\Psi_n^{(1)}> + \lambda^2|\Psi_n^{(2)}> + \cdots\right]$$

$$1 = C^2 + \lambda\left[C<n\left|\Psi_n^{(1)} + C\right|\Psi_n^{(1)}>\right]$$

$$+\lambda^2\left[C<n\left|\Psi_n^{(2)}> + C<\Psi_n^{(2)}\right|n> + <\Psi_n^{(1)}|\Psi_n^{(1)}>\right]$$

$$+\lambda^3[\ldots] + \cdots$$

$$1 = C^2 + \lambda\left[2C \; <n|\Psi_n^{(1)}>\right]$$

$$+\boldsymbol{\lambda^2}\left[\boldsymbol{2C<n\left|\Psi_n^{(2)}\right> + <\Psi_n^{(1)}\middle|\Psi_n^{(1)}>}\right] + \cdots \qquad \textbf{(1E)}$$

بما$|\Psi_n^0>=C|n>$ و $<n|n>= 1$ لذلك $C=1$ ، وكذلك $\lambda \neq 0$ ولكي تكون المعادلة صحيحه يجب ان يكون حدي المعادلة مساويان للصفر

$$\left[2C <n|\Psi_n^{(1)}>\right]=0 \qquad \text{.............. (2E)}$$

$$\left[2C <n\left|\Psi_n^{(2)}> + <\Psi_n^{(1)}\right|\Psi_n^{(1)}>\right]=0 \qquad \text{...........(3E)}$$

ومن العلاقة (3E) نجد ان

$$2C <n\left|\Psi_n^{(2)}>=-<\Psi_n^{(1)}\right|\Psi_n^{(1)}>$$

$$<n|\Psi_n^{(2)}>=-\frac{1}{2}<\Psi_n^{(1)}|\Psi_n^{(1)}>$$

مثال (7):

افترض ان متذبذبا توافقيا ذو بعد واحد وضع تحت تأثير اضطراب من النوع $\hat{H}'=\lambda x^3$. احسب التصحيح الثاني في مستويات طاقة المتذبذب؟

الحل:

سنحل هذه المسألة باستخدام مؤثرات الرفع والخفض التي درسناها في الفصل الثاني لذلك

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}(\hat{a}+\hat{a}^+) \quad \text{وان} \quad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{وكذلك} \quad \hat{a}^+|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$x^3|n\rangle=x^2.x|n\rangle$$

$$x|n\rangle=\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}(\hat{a}+a^+)|n\rangle=\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\left(\hat{a}|n\rangle+a^+|n\rangle\right)$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\left(\sqrt{n}|n-1\rangle+\sqrt{n+1}|n+1\rangle\right)$$

$$x^2|n\rangle = \frac{1}{2\alpha}\left(\sqrt{n}(\hat{a}+a^+)|n-1\rangle + \sqrt{n+1}(\hat{a}+a^+)|n+1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}|n-2\rangle + \sqrt{n}|n\rangle\right) + \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n+2}|n+2\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left\{\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle\right\}$$

$$x^3|n\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2}\left\{\sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle + 3n\sqrt{n}|n-1\rangle + (3n+3)\sqrt{n+1}|n+1\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3}|n+3\rangle\right\}$$

نضرب العلاقة الاخيره اولا بالدالة $\langle n-3|$ وثانيا $\langle n-1|$ وثالثا $\langle n+1|$ واخيرا $\langle n+3|$ وعليه

$$\langle n-3|x^3|n\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2}\sqrt{n(n-1)(n-2)}$$

$$\langle n-1|x^3|n\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2} 3n\sqrt{n}$$

$$\langle n+1|x^3|n\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2}(3n+3)\sqrt{n+1}$$

$$\langle n+3|x^3|n\rangle = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$E_l^2 = \sum_{n\neq l}\frac{\left|\hat{x}^3{}_{n,l}\right|^2}{E_l^0 - E_n^0}$$

$$E_l^2 = \frac{\left|x^3{}_{l-3,l}\right|^2}{E_l^0 - E_{l-3}^0} + \frac{\left|x^3{}_{l-1,l}\right|^2}{E_l^0 - E_{l-1}^0} + \frac{\left|x^3{}_{l+1,l}\right|^2}{E_l^0 - E_{l+1}^0} + \frac{\left|x^3{}_{l+3,l}\right|^2}{E_l^0 - E_{l+3}^0}$$

$$E_l^2 = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3\frac{1}{\hbar w}\left(\frac{l(l-1)(l-2)}{(l+\frac{1}{2})-(l-3+\frac{1}{2})} + \frac{9l^3}{(l+\frac{1}{2})-(l-1+\frac{1}{2})} + \frac{(3l+3)^2(l+1)}{(l+\frac{1}{2})-(l+1+\frac{1}{2})} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{(l+\frac{1}{2})-(l+3+\frac{1}{2})}\right)$$

$$E_l^2 = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3\frac{1}{\hbar w}\left\{-30l^2 - 30l - 11\right\}$$

$$E_l^2 = -\frac{15}{4}\frac{1}{\hbar w}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^3\left\{l^2 + l + \frac{11}{30}\right\}$$

وقيم الطاقات كالتالي

$$E_l^0 = (l+\tfrac{1}{2})\hbar w \quad , \; E_{l-1}^0 = (l-\tfrac{1}{2})\hbar w \;\; , \;\; E_{l+1}^0 = (l+\tfrac{3}{2})\hbar w \quad ,$$

$$E_{l+3}^0 = (l+\tfrac{7}{2})\hbar w , \;\; E_{l-3}^0 = (l-\tfrac{5}{2})\hbar w$$

$$x^3{}_{l-3,l} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{3/2} \sqrt{l(l-1)(l-2)}$$

وهكذا يمكن الاستمرار