مصفوفة مؤثر الموقع $\hat{X}$

$$\hat{X}_{mn} =< \Psi_m(x)\left|\hat{X}\right| \Psi_n(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)_m^* X \ \Psi_n(x) dx$$

$$\left(\hat{X}_x\right)_{mn} = (1/2\sqrt{\propto}) A_m^* A_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_{n+1}(\xi)\, \mathrm{dx}$$
$$+(\frac{\mathrm{n}}{\sqrt{\propto}}) A_m^* A_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_{n-1}(\xi)\, \mathrm{dx}$$

من خلال حالة التعامد لمتعدد حدود هرمت نلاحظ ان التكاملين يساويان صفرا ما لم

التكامل الاول تكون له قيمة عندما $m = n + 1$

$$X_{m,m-1} = \left(\frac{M}{2\alpha}\right)^{1/2} \qquad M = m - 1$$

التكامل الثاني تكون له قيمة عندما $m = n - 1$

$$X_{m,m+1} = \left(\frac{M+1}{2\alpha}\right)^{1/2} \qquad M = m - 1$$

أذن مصفوفة المؤثر $\hat{X}$ في هذا التمثيل تكون

$$\hat{X}_x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \sqrt{m} & 0 & \\ & \sqrt{m} & 0 & \sqrt{m+1} & \\ & 0 & \sqrt{m+1} & 0 & \end{bmatrix}$$

سؤال (واجب)

جد مصفوفة كل من X^2 و P_x^2 (لزيادة المعلومات مراجعة كتاب مقدمة في الميكانيك الكمي للاستاذ الدكتور هاشم عبود)

المتذبذب التوافقي وجبر المصفوفات (مؤثرات الرفع والخفض)

سنجري تغييرا على المؤثرات $\hat{X}$ و $\hat{P}_x$ بحيث نجعلها خالية من الوحدات (Dimensionless) وليكن

$$\chi = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\ X\ , \qquad \mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{mw\hbar}}\ P$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\ \hbar w \left[\chi^{2} + \mathcal{P}^2\right]$$

$$[\chi\,, \mathcal{P}\,] = i$$

لنعرف مؤثر جديد ولنسميه $\hat{a}$ بحيث ان

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ [\chi + i\mathcal{P}\ ], \qquad a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ [\chi - i\mathcal{P}\ ]$$

وعليه تكون المؤثرات χ و $\mathcal{P}$ بدلالة $\hat{a}$ و $a^{\dagger}$ ($a^{\dagger}$ المرافق الهرميتي الى $\hat{a}$)

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\ [\ \hat{a} + a^{\dagger}\ ], \qquad \mathcal{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}\ \ [a^{\dagger} - \hat{a}\ ]$$

لنرى الان ماذا يعني حاصل ضرب المؤثرات $\hat{a}$ و $a^{\dagger}$ وكيف سنستفيد منهما لاحقا

$$\hat{a}a^{\dagger} = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ [\chi + i\mathcal{P}\ ] * \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ [\chi - i\mathcal{P}\ ]$$

$$\hat{a}a^{\dagger} = \frac{1}{2}\left(\ \chi^{2} + \mathcal{P}^2\right) + \frac{i}{2}(\mathcal{P}\,\chi - \chi\mathcal{P}) \qquad ....(1)$$

$$a^{\dagger}\,\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\chi^{2} + \mathcal{P}^{2}\right) - \frac{i}{2}\left(\mathcal{P}\,\chi - \chi\mathcal{P}\right) \qquad ....(2)$$

نطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم (1) نحصل على

$$\hat{a}a^{\dagger} - a^{\dagger}\,\hat{a} = i[\mathcal{P}\,,\chi] = 1 \qquad ....(*)$$

$$\left[\hat{a}\,,a^{\dagger}\right] = 1 \qquad ....(3)$$

من العلاقة (2) والعلاقة (*) يمكن ان نحصل على

$$a^{\dagger}\,\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\chi^{2} + \mathcal{P}^{2}\right) - \frac{i}{2}\,\frac{1}{i}$$

$$a^{\dagger}\,\hat{a} = \frac{\mathcal{H}}{\hbar w} - \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{H} = (a^{\dagger}\,\hat{a} + \frac{1}{2})\ \hbar w$$

اي اننا وجدنا صيغة المؤثر الهاملتوني للمتذبذب التوافقي بدلالة مؤثرات الرفع والخفض وبوحدات $\hbar w$

لنعرف المؤثر التالي بدلالة $\hat{a}$ و $a^{\dagger}$

$$\hat{N} = \ a^{\dagger}\,\hat{a}$$

$$\mathcal{H} = (\hat{N} + \frac{1}{2})\ \hbar w$$

لتكن الدالة $\Psi = |\lambda >$ الدالة الذاتية للهاملتون $\mathcal{H}$ بقيمة ذاتية λ اي بمعنى

$$\mathcal{H}|\lambda > = \lambda\,|\lambda >$$

نريد معرفة عمل المؤثر $a^{\dagger}$ على المعادلة $\mathcal{H}|\lambda > = \lambda\,|\lambda >$

$$\mathcal{H}(\, a^{\dagger}\, |\lambda >) \, =?$$

$$= (a^{\dagger}\, \hat{a} + \frac{1}{2}) \;\; a^{\dagger}\, |\lambda > \hbar w$$

يمكن رفع $\hbar w$ من المعادلة مؤقتا لانها مقدار ثابت ثم بعد ذلك اضافتها الى النتيجه الاخيرة لتقليل تكرار كتابتها

$$a^{\dagger}(\mathcal{H}\left|\lambda >= \; a^{\dagger}\left(\hat{a}a^{\dagger} + \frac{1}{2}\right)\right|\lambda >$$

$$= \; a^{\dagger}(a^{\dagger}\, \hat{a} + 1 + \frac{1}{2}) \;\; |\lambda >$$

$$= \; a^{\dagger}(\, \mathcal{H} + 1) \;\; |\lambda >$$

$$= \; a^{\dagger}(\, \lambda + 1) \;\; |\lambda >$$

$$= (\, \lambda + 1) \quad a^{\dagger} \;\; |\lambda >$$

$$\mathcal{H}(\, a^{\dagger}\, |\lambda >) = \; (\, \lambda + 1) \quad a^{\dagger} \;\; |\lambda >$$

يمكن القول ان $(a^{\dagger} \;\; |\lambda >)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\mathcal{H}$ بقيمه ذاتية $(\lambda + 1)$ ومنه نستنتج ان المؤثر $a^{\dagger}$ رفع القيمة الذاتية للمؤثر الهاملتوني بمقدار وحده واحدة لذلك يسمى مؤثر رفع

وبالتالي نستطيع القول ان

$$a^{\dagger} \;\; |\lambda > = C_{\lambda+1}|\lambda >$$

بالمثل فان

$$\mathcal{H}(\, \hat{a}|\lambda >) = (\, \lambda - 1)\hat{a} \; |\lambda >$$

أذن $\hat{a}$ هو مؤثر خفض

$$\hat{a}\,|\lambda> = C_{\lambda-1}|\,\lambda>$$

مؤثر الخفض يجب ان يغلق (يتوقف) عند حد معين ولا يمكن الاستمرار به للمالانهاية بحيث ان

$$< E > \geq 0$$

لنفرض ان $|0>$ هي ادنى حالة ممكنه (حالة مستقرة ground state) بحيث ان تاثير $\hat{a}$ عليها يساوي صفر

$$\hat{a}|0> = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

تعتبر هذه العلاق جدا مهمة بالنسبة للمتذبذب التوافقي وسنستفاد منها لاحقا

القيم الذاتية للمتذبذب التوافقي Eigen values of the harmonic oscillator

سبدأ من الحالة المستقرة

$$\mathcal{H}|0> = E_0|0>$$

$$(a^{\dagger}\,\hat{a} + \frac{1}{2})\,\Big|0> = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\Big|\,0>$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}\right)\Big|0> = \frac{1}{2}\Big|\,0>$$

$$E_0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\hbar w$$