الزخم الزاوي الذاتي (البرم) Intrinsic angular momentum (SPIN)

وجد تجريبا ان معظم الجسيمات تمتلك حرية داخلية اضافية تسمى " البرم " ومن الافضل التفكير بالبرم كمجرد عدد كمي اضافي نحتاجه لتوصيف حالة (دالة) الجسيم ، والمعنى الفيزياوي للبرم غير مفهوم جيدا وبرم الجسيم هو نوع من الزخم الزاوي .

يتم وصف البرم " بمؤثر S, على شكل متجه "

$$\vec{S} = \overrightarrow{e_x}\, S_x + \overrightarrow{e_y}\, S_y + \overrightarrow{e_z}\, Z_z$$

$\overrightarrow{e_i}$ وحدة متجه $(i = x, y, z)$ مركبات البرم (S_x, S_y, S_z) تحقق علاقات التبادل التالية:

$$[S_x\, , S_y = i\hbar S_z]$$

$$[S_y\, , S_z = i\hbar S_x]$$

$$[S_z\, , S_x = i\hbar S_y]$$

وهذا يعني وجود دوال ذاتية انية مشتركه لكل من S^2 و S_z

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$S^2\, |S, m_s > \ \hbar^2 S(S+1)|S, m_s >$$

$$S_z\, |S, m_s > = \hbar m_s |S, m_s >$$

البرم ($\frac{1}{2}$) Spin One Half

للبرم ($S = \frac{1}{2}$) هناك فقط قيمتين للمركبة m_s ، $m_s = \pm\frac{1}{2}$ نستطيع ان نقول ان المتجه الذاتي هو $|\pm\frac{1}{2}>$ بقيم ذاتية

$$S^2 \left|\pm\frac{1}{2}\right. > = \frac{3}{4}\hbar^2 \left|\pm\frac{1}{2}\right. >$$

$$S_z \left|\pm\frac{1}{2}\right. > = \pm\frac{\hbar}{2} \left|\pm\frac{1}{2}\right. >$$

يمكن كذلك تعريف مؤثرات الرفع والخفض وبيان تأثيرها على هذه الدوال القياسيه

$$S_\pm = S_x \pm iS_y$$

$$S_+ \left|\frac{1}{2}\right. > = 0$$

$$S_- \left|\frac{1}{2}\right. > = \hbar \left|-\frac{1}{2}\right. >$$

$$S_- \left|-\frac{1}{2}\right. > = 0$$

$$S_+ \left|-\frac{1}{2}\right. > = \hbar \left|\frac{1}{2}\right. >$$

كالسابق فان مؤثر الرفع اما ان يرفع الحالة او يجعلها تساوي صفر اذا كانت بقيمتها العظمى ، من المناسب استخدام التمثيل المصفوفي للبرم

$$\left|\frac{1}{2}\right. > = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\right. > = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

في هذا التمثيل فان مؤثرات البرم تتناسب مع مصفوفات باولي $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ أذ ان

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وعليه يكون لدينا

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 1$$

هناك عدة طرق لتمثيل متجه (دالة) البرم وهي

$$|\frac{1}{2}> = \binom{1}{0} = |+> = |\uparrow> = \uparrow$$

$$|-\frac{1}{2}> = \binom{0}{1} = |-> = |\downarrow> = \downarrow$$

مثال: استخدم التمثيل المصفوفي للبرم واحسب

$$S_x\ |+> = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\binom{1}{0} = \frac{\hbar}{2}\binom{0}{1} = \frac{\hbar}{2}|->$$

$$S_x\ |-> = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\binom{0}{1} = \frac{\hbar}{2}\binom{1}{0} = \frac{\hbar}{2}|+>$$

نلاحظ هنا ان المؤثر S_x ينتج انتقال بين الدوال الذاتية للمؤثر S_z عندما يؤثر S_x على احدى الدوال الذاتية فانه ينتج عدد من الاخريات وهكذا بالنسبة للمؤثر S_y أما S_z فالدوال هي دواله الذاتية اي تبقى الدالة كما هي مضروبه بالقيمة الذاتية

<u>سؤال</u> جد نواتج التاثير التالي

$S_y|+>$ $S_z|->$ $S_y|->$ $S_{z|}|+>$ ؟

<u>مثال:</u>

ركب (كون) مصفوفة مركبة البرم (S_r) باتجاه اعتباطي وليكن $\hat{r}$ مستخدما المحاور الكرويه والتي تصف المتجه بالعلاقة $\hat{r} = \vec{i}\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) + \vec{j}\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) + \vec{k}\cos(\vartheta)$.

جد كذلك القيم الذاتية والدوال المعايره للمركبة S_r ؟

الحل:

$$\vec{S} = \vec{i}\,S_x + \vec{j}\,S_y + \vec{k}\,S_z$$

أذ ان $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$S_r = \vec{S}\cdot\hat{r}$$

$$S_r = S_x\,(\sin(\vartheta)\cos(\varphi)) + S_y\,(\sin(\vartheta)\sin(\varphi)) + S_z\,(\cos(\vartheta))$$

$$S_r = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(\sin(\vartheta)\cos(\varphi)) + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}(\sin(\vartheta)\sin(\varphi)) + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\cos(\vartheta))$$

$$S_r = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}(\cos(\vartheta) & e^{-i\varphi}\sin\vartheta\\ e^{i\varphi}\sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{pmatrix}$$

وهذه تمثل المصفوفة المطلوبة، الان علينا ايجاد القيم الذاتية وسنستعمل معادلة القيم الذاتية بالمصفوفات

$$\text{Determinant}[\,S_r - \lambda\,\mathbb{I}\,] = 0$$

λ تمثل القيم الذاتية ، $\mathbb{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ المصفوفة الواحدية

$$\left|\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}(\cos(\vartheta) & e^{-i\varphi}\sin\vartheta\\ e^{i\varphi}\sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

نلاحظ ان هناك قيمتين ذاتيتين

المطلوب الاخير هو ايجاد الدوال الموجية المعايره ولنفرض ان الدالة الموجية هي $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}(\cos(\vartheta) & e^{-i\varphi}\sin\vartheta\\ e^{i\varphi}\sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\alpha\cos(\vartheta) + \beta e^{-i\varphi}\sin(\vartheta) = \pm\alpha$$

$$\beta = e^{i\varphi}\ \frac{(\pm 1 - \cos(\vartheta))}{\sin(\vartheta)}\ \alpha$$

سنبدأ بالاشارة العليا (+) وسنستفاد من بعض العلاقات المثلثية التالية

$$1 - \cos(\vartheta) = 2sin^2(\frac{\vartheta}{2})$$

$$\sin(\vartheta) = 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos(\frac{\vartheta}{2})$$

وعليه نحصل على $$\beta = \ e^{i\varphi}\,\frac{\sin(\frac{\vartheta}{2})}{\cos(\frac{\vartheta}{2})}\ \alpha$$

وبأجراء المعايره $$1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + \frac{sin^2(\frac{\vartheta}{2})}{cos^2(\frac{\vartheta}{2})}\ |\alpha|^2$$

$$1 = |\alpha|^2\left(1 + tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) = |\alpha|^2\ sec^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = |\alpha|^2\,\frac{1}{cos^2(\frac{\vartheta}{2})}$$

$$\alpha = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \rightrightarrows \quad \beta = e^{i\varphi}\sin(\frac{\vartheta}{2})$$

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ e^{i\varphi}\sin(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix}$$

وهذه الدالة الموجية للاشارة العليا (+) اي عندما $\lambda\ = \hbar/2$

الاشارة السفلى (-) اي ان $\lambda = -\hbar/2$

$$1 + \cos\vartheta = 2\ cos^2(\frac{\vartheta}{2})$$

$$\beta = -e^{i\varphi}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\ \alpha$$

$$1 = |\alpha|^2\frac{cos^2(\frac{\vartheta}{2})}{sin^2(\frac{\vartheta}{2})}\ |\alpha|^2 = |\alpha|^2\frac{1}{sin^2(\frac{\vartheta}{2})}$$

نختار $\alpha = e^{i\varphi}\sin(\frac{\vartheta}{2})$ وبالتالي $\beta = -cos(\frac{\vartheta}{2})$

$$\chi_{-}^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ -\cos(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix}$$

وهو المطلوب

عزم ثنائي القطب المغناطيسي الذاتي **Intrinsic Magnetic Dipole Moment**

يمتلك الالكترون عزما ذاتيا ثنائي قطب مغناطيسي $\overrightarrow{\mu_e}$ نتيجة وجود البرم

$$\overrightarrow{\mu_e} = -\frac{g_e|e|}{2m_e}\ \vec{S}$$

أذ ان g_e يمثل عامل g للالكترون وقيمته العملية $g_e = 2.00232$ ولاغلب الحسابات يؤخذ $g_e = 2.00$

$$\overrightarrow{\mu_e} = -\frac{|e|}{m_e}\ \vec{S}$$

ولاي جسيم مشحون يكون عزم ثنائي القطب المغناطيسي

$$\vec{\mu} = -\frac{g|q|}{2M}\,\vec{S}$$

كل جسيم له عامل g مختلف (q شحنة الجسيم ، M كتلة الجسيم)

ان الهاملتون لالكترون في مجال مغناطيسي يتأتى من اضافة حد تفاعل عزم ثنائي القطب المغناطيسي للالكترون مع المجال المغناطيسي الخارجي ، U ،

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$$\hat{H} \rightrightarrows \hat{H} + \frac{|e|}{m_e}\,\vec{S}\cdot\vec{B}(\vec{R})$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}\vec{P} + |e|\vec{A}(\vec{R})^2 - |e|\ddot{O}\left(\vec{R}\right) + \frac{|e|}{m_e}\vec{S}\cdot\vec{B}(\vec{R})$$

واذا كان المجال المغناطيسي منتظم وضعيف

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m_e} + \frac{|e|}{2m_e}B_0(L_z + 2S_z)$$

وعند اضافة جهد كروي متماثل $U(\vec{R})$

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m_e} + U(\vec{R}) + \frac{|e|}{2m_e}B_0(L_z + 2S_z)$$

واذا كانت الدالة الموجية للالكترون بغياب المجال المغناطيسي معروفة

$$H_0\,|n,l,m >= E_n^0\,|n,l,m >$$

او تكتب للمجال المغناطيسي المنتظم الضعيف

$$\hat{H}\,|n,l,m_l,m_s> = E_{n,m_l,m_s}\,|n,l,m_l,m_s>$$

اذ ان الطاقة تساوي

$$E_{n,m_l,m_s} = E_n^0 + \mu_B B_0(m_l + 2m_s)$$

وان $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e}$ او ما يسمى مغنيط بور Bohr magneton