**الدوال الذاتية لمؤثر الزخم الزاوي Eigen functions of the angular momentum operator**

نحن نعرف ان الزخم الزاوي يعطى بالعلاقة $\vec{L} = -i\hbar(\vec{r}x\vec{\nabla})$ وان

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\partial/\partial r + \hat{\vartheta}\frac{1}{r}\partial/\partial\vartheta + \hat{\varphi}\frac{1}{\mathrm{r}\sin(\vartheta)}\partial/\partial\varphi \qquad (59)$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

أذ ان $r$ يمثل مقدار المتجه و $\hat{r}$ وحدة المتجه باتجاه $\vec{r}$ وباستخدام تعريف الزخم والعلاقة (59) نحصل على:

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left[r(\hat{r}x\hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + \left(\hat{r}x\hat{\vartheta}\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (\hat{r}x\hat{\varphi})\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

ولكن نحن نعرف ان

$$\hat{r}x\hat{r} = 0$$

$$\hat{r}x\hat{\vartheta} = \hat{\varphi}$$

$$\hat{r}x\hat{\varphi} = -\hat{\vartheta}$$

وعليه يكون الزخم الزاوي

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \hat{\vartheta}\,\frac{1}{\sin(\vartheta)}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad (60)$$

وحدات المتجهات $\hat{\vartheta}$ و $\hat{\varphi}$ يمكن تحليلها بواسطة مركباتها الديكارتية

$$\hat{\vartheta} = (\cos(\vartheta)\ \cos(\varphi))\vec{\imath} + (\cos(\vartheta)\ \sin(\varphi))\vec{\jmath} - (\sin(\vartheta))\vec{k}$$

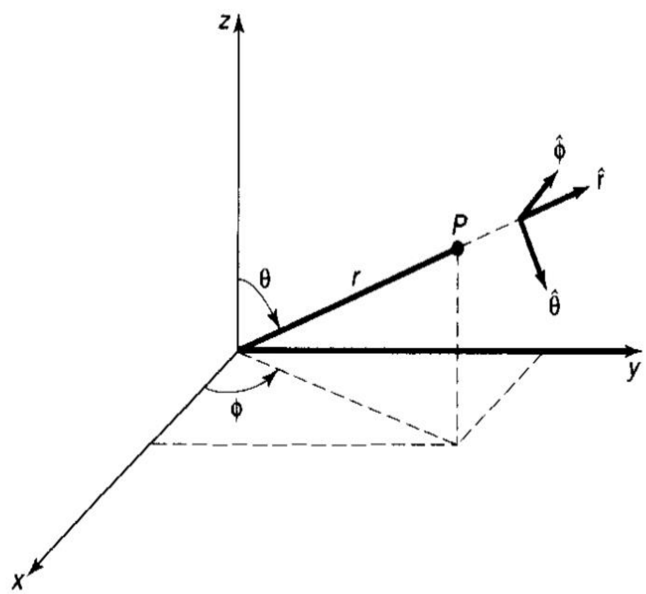
$$\vec{\varphi} = -(\sin(\varphi))\vec{\imath} + (\cos(\varphi))\vec{\jmath}$$

وبالتالي يكون الزخم الزاوي

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\Big[\{(-\sin(\varphi))\vec{\imath} + +(\cos(\varphi))\vec{\jmath}\} \ \frac{\partial}{\partial\vartheta}$$
$$- \left\{(\cos(\vartheta)\cos(\varphi))\vec{\imath} + (\cos(\vartheta)\sin(\varphi))\vec{\jmath} - (\sin(\vartheta))\vec{k}\right\}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big]$$

من الواضح وبعد ترتيب المعادلة الاخيرة يمكننا ايجاد مركبات الزخم الزاوي

$$\left.\begin{array}{c} L_x = -i\hbar\left(-\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cos(\varphi)\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_y = -i\hbar\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \sin(\varphi)\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{array}\right\} \qquad (61)$$




الشكل (3-1) : شكل يمثل الاحداثيات الكرويه والمتعامدة وزاوية القطب $\vartheta$ وزاوية السمت $\varphi$.

كذلك نحتاج مؤثرا الرفع والخفض

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left[(-\sin(\varphi) \pm icos(\varphi))\ \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \left(\cos(\varphi) \pm isin(\varphi)\right)\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

ولكن $\cos(\varphi) \pm isin(\varphi) = \ e^{\pm i\varphi}$

$$L_{\pm} = \pm\hbar\, e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} \pm i cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_{+}L_{-} = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + cot^2(\vartheta)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

واخيرا

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (62)$$

وهي نفس العلاقة السابقة (42)

نحن الان في موقع نستطيع حساب $f_l^m(\vartheta,\varphi)$ والتي هي دالة ذاتية للمؤثر $L^2$ وبقيمة ذاتية $\hbar^2 l(l+1)$

$$L^2 f_l^m(\vartheta,\varphi) = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] f_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$$= \hbar^2 l(l+1)\ f_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$f_l^m(\vartheta,\varphi)$ هي كذلك دالة ذاتية الى المؤثر $L_z$ بقيمة ذاتية $\hbar m$ .

$$L_z f_L^m(\vartheta,\varphi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} f_L^m(\vartheta,\varphi) = m\hbar\, f_L^m(\vartheta,\varphi)$$

النتيجة هي التوافقيات الكروية Spherical harmonic $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ وهذا معناه ان التوافقيات الكرويه هي دوال ذاتية للمؤثرين $L^2$ و $L_z$ .

**<u>مثال:</u>**

ما هي القياسات الممكنة لكل من $L^2$ و $L_z$ للدالة الذاتية $|l,m> = |3,m>$ ؟

الحل:- القياسات الممكنة فقط هي القيم الذاتية ، فالقيم الذاتية للمؤثر $L^2$ هي $\hbar^2 l(l+1)$

$$\hbar^2 l(l+1) = 3(3+1)\,\hbar^2 = 12\hbar^2$$

لقيم $l = 3$ فان القيم ممكنة القياس للمؤثر $L_z$ هي من $-3\hbar$ الى $3\hbar$

$$-3\hbar, \quad -2\hbar, \quad -\hbar, \quad 0, \quad \hbar, \quad 2\hbar, \quad 3\hbar$$

**مثال:**

ما هي نتائج تاثير المؤثرين $L_+$ و $L_-$ على الدالة الذاتية $|2,-1>$ ؟

الحل:

$$L_+ \left|l,m> = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\ \hbar\right| l,m+1>$$

$$L_+ \left|2,-1> = \sqrt{2(2+1)-(-1)\big((-1)+1\big)}\ \hbar\right| -1+1>$$

$$L_+ \left|2,-1> = \sqrt{6-0}\ \hbar\right|2\ ,0>$$

$$L_+ \left|2,-1> = \sqrt{6}\ \hbar\right|2\ ,0>$$

بالمثل يمكن ايجاد

$$L_- \ |2\ ,-1> = ?$$

**سؤال (واجب):** جسيم دالته الموجية $|l,m>$ والتي هي دالة ذاتية للمؤثر $L^2$ في مجال جهد مركزي ، أثبت ان $L^2 = 2\hbar^2 I$ اذ ان $I$ يمثل المصفوفة الواحدية

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$