الزخم الزاوي Angular Momentum

تعتبر الطاقة والزخم الزاوي من الكميات المحفوظه في النظرية الكلاسيكية للاجسام تحت تأثير القوى المركزيه لذلك ليس من المستغرب ان تلعب هذه الكميات دورا رئيسيا في نظرية الميكانيك الكمي .

كلاسيكيا يعطى الزخم الزاوي بالعلاقة

$$\vec{L} = \vec{r}\; x\; \vec{p} \qquad (38)$$

وان مركبات الزخم الزاوي على المحاور الديكارتية هي

$$\left.\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

في الميكانيك الكمي فان المؤثرات يمكن الحصول عليها

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad p_y = -\,i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad p_z = -\,i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

الان سنحول هذه المؤثرات للنمحاور الكرويه وسنستخدم بعض العلاقات المعروفة في المراحل الدراسية السابقة

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right) \;, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = rsin(\vartheta)\cos(\varphi$$

$$y = rsin(\vartheta)\sin(\varphi)$$

$$z = rcos(\vartheta)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

وعلاقتين مشابهتين الى كل من $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{xz}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\vartheta)\cos\left(\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\sin(\vartheta)}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

بعد هذه العلاقات وعلاقات اخرى على الطالب البحث عنها سنكتب مركبات الزخم الزاوي الديكارتية بدلالة المحاور الكرويه ، لدينا مؤثر لابلاس في المحاور الكرويه يأخذ الصيغة التالية

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\partial r + \hat{\vartheta}\frac{1}{r}\partial\vartheta + \hat{\varphi}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\partial\varphi \qquad (40)$$

$\hat{r}, \hat{\vartheta}, and\ \hat{\varphi}$ تمثل وحدات المتجهات بالمحاور الكروية

باستخدام العلاقة $\vec{L} = -i\hbar\,\hat{r} x\,\hat{\nabla}$ وعلاقة التعامد لوحدات المتجهات بالمحاور الكروية نحصل على

$$\vec{L} = -i\hbar\left(\hat{\varphi}\partial\vartheta - \hat{\vartheta}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\partial\varphi\right) \qquad (41)$$

وحدات المتجهات بالاحداثيات الديكارتية تعطى بدلالة وحدات المتجهات الكرويه بالعلاقات التالية:

$$\hat{\imath} = \hat{x} = \hat{r}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + \hat{\vartheta}\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \hat{\varphi}\sin(\varphi)$$

$$\hat{\jmath} = \hat{y} = \hat{r}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + \hat{\vartheta}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + \hat{\varphi}\sin(\varphi)$$

$$\hat{k} = \hat{z} = \hat{r}\cos(\vartheta) - \hat{\vartheta}\sin(\theta)$$

ولايجاد مركبات الزخم نستخدم العلاقة $L_x = \hat{x}\cdot\vec{L}$ وهكذا لبقية العلاقات ومنه نجد الضرب اللااتجاهي

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\left(-\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cos(\varphi)\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_y &= -i\hbar\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \sin(\varphi)\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

كذلك يمكن ان نجد L^2 من حاصل الضرب $\vec{L}\cdot\vec{L}$ كالتالي

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (42)$$

وان مؤثر لابلاس ∇^2 يعطى بالعلاقة

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\vec{L}\cdot\vec{L} \qquad (43)$$

واجب/ مطلوب اثبات العلاقة (43)

القيم الذاتية   Eigen Values

المؤثران L_x و L_y غير متبادلان

$$[L_x \ , L_y] = [yp_z - zp_y \ , zp_x - xp_z]$$

$$[L_x \ , L_y] = (yp_z - zp_y \ )(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)(\ yp_z - zp_y \ )$$

$$[L_x \ , L_y] = (yp_z - zp_y \ )(zp_x) - (yp_z - zp_y \ )(xp_z) - (zp_x - xp_z)(\ yp_z) + \ (zp_x - xp_z)(zp_y \ )$$

$$[L_x \ , L_y] = yp_z zp_x - zp_y zp_x \ - yp_z \ xp_z + zp_y \ xp_z - \ zp_x \ yp_z + xp_z \ yp_z + zp_x \ zp_y \ - xp_z zp_y$$

$$[L_x \ , L_y] = (yp_z zp_x - \ zp_x \ yp_z) - (yp_z \ xp_z - xp_z \ yp_z) + (zp_y \ xp_z - xp_z zp_y \ ) - (zp_y zp_x \ - zp_x \ zp_y \ )$$

$$[L_x \ , L_y] = [yp_z \, , zp_x] - [yp_z \ , xp_z] - [zp_y , zp_x \ ] + [zp_y \ xp_z]$$

من العلاقات القانونية لاقواس التبادل التالية:

$$[r_i, p_j] = -[p_i, r_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0$$

المؤثرات التي لا تتبادل هي

p_x مع x p_y مع y وكذلك p_z مع z لذلك فان الحدود الوسطيه تسقط (تحذف) ويتبقى لدينا

$$[L_x \ , L_y] = yp_x[p_z \ , z] + xp_y[z \ , p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \quad (44)$$

لعلاقات التبادل الاخرى فاننا نستطيع الحصول عليها من خلال تدوير الارقام (الفهارس) كالتالي

$$[L_x \ , L_y] = i\hbar L_z \ , \quad [L_y \ , L_z] = i\hbar L_x \ , \quad [L_z \ , L_x] = i\hbar L_y \qquad (45)$$

وطبقا لعلاقة اللاتحديد العامة التالية

$$\sigma_{L_x}^2 \, \sigma_{L_y}^2 \ \geq \left(\frac{1}{2i} < i\hbar L_z >\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} < L_z >^2$$

$$\sigma_{L_x} \, \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |< L_z >| \qquad (46)$$

وان مربع الزخم الزاوي الكلي

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \qquad (47)$$

يتبادل مربع الزخم الكلي L^2 مع كل مركبة من مركبات L

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0 \qquad (47)$$

سؤال : اثبت بالتفصيل العلاقة (47) ؟

الان نريد ايجاد الدوال الذاتية الانية ث simultaneous /eigenstates لكل من L^2 و L_z

لنفرض ان L^2 يؤثر على الدالة f ويعطي قيمة ذاتية λ وان L_z يؤثر على نفس الدالة ويعطي قيمة ذاتية μ

$$\left.\begin{aligned} L^2 f &= \lambda f \\ L_z f &= \mu f \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

سنستخدم تقنية المؤثرات السلمية ولنعرف المؤثر

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad (49)$$

لنرى علاقة التبادل بين هذا المؤثر السلمي $L_\pm$ والمؤثر L_z اي ايجاد $[L_z \, , L_\pm]$

$$[L_z \, , L_\pm] = [L_z \ , \ L_x \pm iL_y] = [L_z \, , L_x] \pm i[L_z \, , L_y]$$

$$[L_z\,,L_\pm] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x)$$

$$[L_z\,,L_\pm] = \pm\hbar\big(L_x \pm iL_y\big)$$

$$[L_z\,,L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{50}$$

$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{51}$$

سؤال: اثبت صحة العلاقة (51) ؟

أذا كانت f دالة ذاتية للمؤثرين L^2 و L_z كذلك الداله $(L_\pm f)$ هي ذاتية لنفس المؤثرين L^2 و L_z

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \tag{52}$$

لذلك تعتبر الدالة $(L_\pm f)$ دالة ذاتية الى المؤثر L^2 بنفس القيمة الذاتية λ ولنرى الان المؤثر الاخر L_z

$$L_z(L_\pm f) = (L_zL_\pm - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f)$$

$$L_z(L_\pm f) = (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \tag{53}$$

اي ان الدالة $(L_\pm f)$ هي دالة ذاتية الى المؤثر L_z بقيمة ذاتية جديدة $(\mu \pm \hbar)$ نلاحظ هنا ان L_+ هو مؤثر رفع raising operator

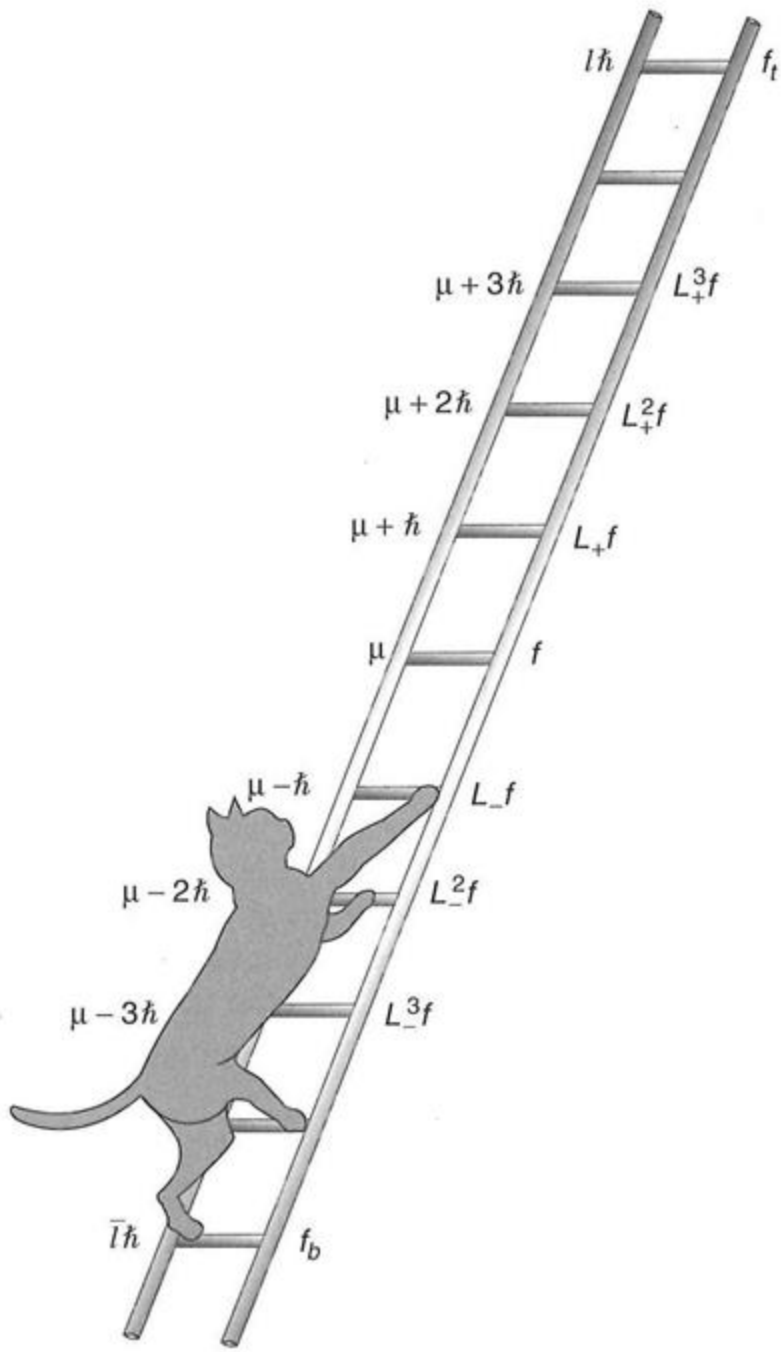
وان L_- هو مؤثر خفض lowering operator

وللحصول على قيمة معينة من λ و الحصول على سلم من الحالات لها درجة منفصلة عن جاراتها بوحدة واحدة من $\hbar$ في القيم الذاتية للمؤثر L_z كما في الشكل (2-1) ، يجب ان توجد درجه عليا top rung ، f_t عملها كالتالي

$$L_+ f_t = 0 \tag{54}$$

لتكن $\hbar l$ هي القيمة الذاتية للمؤثر L_z عند الدالة في الدرجه العليا اي ان

$$L^2 f_t = \lambda f_t \quad \text{وكذلك} \quad L_z f_t = \hbar l f_t$$



الشكل (2-1) سلم حالات الزخم الزاوي

والان لنرى كيف يمكننا حساب القيمة الذاتية لمربع الزخم L^2 عند اكبر قيمة ذاتية للمؤثر L_z اي عند دالة الدرجه الكبرى f_t ولنبدأ بالمؤثر السلمي

$$L_\pm L_\mp = (L_x \pm iL_y)(L_x \mp L_y)$$

$$= L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x)$$

$$= L^2 - L_z^2 \mp i(i\,\hbar\, L_Z)$$

أو نكتب العلاقة بالصيغه التاليه

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar\, L_Z \qquad (55)$$

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar\, L_Z) f_t$$

$$= (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t$$

$$= \hbar^2 l(l+1) f_t = \lambda f_t$$

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \qquad (56)$$

هذه النتيجه تخبرنا عن القيمة الذاتية للمؤثر L^2 بدلالة القيمة الذاتية الكبرى للمؤثر L_Z عند الدالة f_t .

بالمقابل هناك درجة دنيا (صغرى) ،bottom rung ، f_b بحيث ان

$$L_- f_b = 0 \qquad (57)$$

ليكن $\bar{l}\,\hbar$ يمثل القيمة الذاتية للمؤثر L_z في الحالة الدنيا f_b

$$L^2 f_b = \lambda f_b \quad \text{وكذلك} \quad L_z f_b = \bar{l}\,\hbar f_b$$

نستخدم العلاقة (55) ونأخذ الاشارة الاعلى

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar\, L_Z) f_b$$

$$L^2 f_b = (0 + (\bar{l}\,\hbar)^2 - \bar{l}\hbar^2) f_b$$

$$L^2 f_b = \hbar^2\, \bar{l}(\bar{l} - 1)$$

$$\lambda = \hbar^2\, \bar{l}(\bar{l} - 1) \qquad (58)$$

بمساواة المعادلتين (56) و (58) نحصل على

$$l(l+1)=\bar{l}(\bar{l}-1)$$

أما $\bar{l}=(l+1)$ وهذا يعني ان القيمة الدنيا Bottom rung اعلى من القيمة العليا Top rung لذلك يهمل لانه غير جائز.

أو $\bar{l}=l$ وهو المطلوب.

الدالة الموجية تتحدد (ترتبط) بالارقام $l\ ,m$ كالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} L^2 f_l^m=\hbar^2 l(l+1) f_l^m \\ L_z f_l^m=m\,\hbar f_l^m \end{array}\right\} \qquad (59)$$

$$m=-l,-l+1,\ldots\ldots,-1,0,1,2,\ldots\ldots..,l-1,l$$

$$l=0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots..$$

احيانا يمكن كتابة الدالة كالتالي

$$f_l^m\ \equiv|lm\rangle$$

$L_\mp$ هو المرافق الهرميتي للمؤثر $L_\pm$

مثال:

أفترض ان جسيما دالته الموجية $|lm\rangle$ هي دالة ذاتية الى المؤثرين L^2 و L_z تحت تأثير قوى مركزية (او تحت جهد مركزي) . أحسب

1- $\Delta L_x^2+\Delta L_x^2$

2- ما هي قيمة l و m التي تجعل $\Delta L_x^2+\Delta L_x^2=0$

الحل:

لدينا العلاقات التاليه سنستفاد منها في حل السؤال

$$\Delta L_x^2=< L_x^2\ >-< \ L_x >^2$$

$$\Delta L_y^2=< L_y^2\ >-< \ L_y >^2$$

$$L_x=\frac{L_+ + L_-}{2}, \qquad L_y=\frac{L_+ + L_-}{2i}$$

$$L_x^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+)$$

$$L_y^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+)$$

$$L_+ \left|lm > = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\right| l, m+1 >$$

$$L_- \left|lm > = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\right| l, m-1 >$$

$$L_+ L_-|lm > = \hbar^2[l(l+1) - m(m-1)]|l, m >$$

$$L_- L_+|lm > = \hbar^2[l(l+1) - m(m+1)]|l, m >$$

وعليه سنستفاد الان من العلاقات اعلاه لايجاد المطلوب الاول:

$$< L_x >=< lm|L_x|lm >=< lm \left|\frac{L_+ + L_-}{2}\right| lm > = 0$$

$$< L_y >=< lm|L_y|lm >=< lm \left|\frac{L_+ - L_-}{2i}\right| lm > = 0$$

$$< L_x^2 > =< lm|L_x^2|lm > = \frac{1}{4}\{< lm|(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+)|lm >\}$$

$$= \frac{1}{4}\{< lm|(L_+^2 + L_-^2)|lm > +< lm|L_+L_- + L_-L_+)|lm >\}$$

$$= \hbar^2[l(l+1) - m(m-1) + l(l+1) - m(m+1)]$$

$$= 2\hbar^2[l(l+1) - m^2]$$

$$< L_y^2 > = 2\hbar^2[l(l+1) - m^2]$$

واخيرا

$$\Delta L_x^2 + \Delta L_x^2 = < L_x^2 > -< L_x >^2 +< L_y^2 > -< L_y >^2$$

$$= 4\hbar^2[l(l+1) - m^2]$$

ثانيا لايجاد قيم l و m التي تجعل مجموع مربع اللادقة يساوي صفر

من العلاقة الاخيره يجب ان تكون الكمية داخل القوس المربع مساوية الى صفر لتجعل المجموع يساوي صفر

$$l(l+1)-m^2=0 \rightrightarrows \;\; m^2=l(l+1)$$

l و m اعداد صحيحه لذلك يجب ان يكون $l=m=0$ هو الذي يحقق المطلوب.

واجب:

استخدم المعادلة (42) اثبت ان

$$L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} \pm i\cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$