Chapter 6

The Linear Moment and Collisions

عندما يتصادم جسمان فإن حركتهما يمكن أن توصف من خلال قانون الحفاظ على الطاقة والحفاظ على كمية الحركة. في هذا الباب سندرس كيف نستخدم مفهوم الطاقة وكمية الحركة لوصف التصادم بين الأجسام.

6.1 The Linear Moment

The linear moment (p) *of a particle is defined as the mass of the particle multiplied by its velocity.*

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (6.1)$$

The linear moment is a vector quantity and has a unit of kg.m/s.

تدعى كمية الحركة الخطية (***Linear moment***) في بعض الأحيان باسم العزم الخطي ويرتبط بمفهوم القوة المؤثرة على الجسم من خلال قانون نيوتن الثاني، حيث تعرف القوة بأنها معدل التغير في كمية الحركة الخطية للجسم. فإذا كانت القوة المؤثرة تساوي صفراً فإن كمية الحركة الخطية تكون ثابتة.

From Newton's second law of motion we have

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (6.2)$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (6.3)$$

or we can write the equation as

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad (6.4)$$

أي أن التغير في كمية الحركة الخطية هو القوة في الفترة الزمنية لتأثير القوة. لإيجاد التغير في كمية الحركة الخطية لجسم من حالة ابتدائية p_i عند زمن t_i إلى حالة نهائية p_f عند زمن t_f.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \qquad (6.5)$$

الطرف الأيمن للمعادلة يعبر عن كمية فيزيائية جديدة تدعى الصدمة ***Impulse*** والتي تعرف بالقوة المؤثرة خلال فترة زمنية قصيرة.

Impulse ***($\vec{I}$)*** *is a vector quantity defined as the force acting in short time and its equal to the change in momentum of the particle.* The impulse has a unit of N.s.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} == \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \qquad (6.6)$$

The impulse equation is equivalent to the Newton's second law of motion.

Example 6.1

A car travelling at speed of 300m/s strikes a stone of mass 0.5kg and 20cm in size. Estimate the force exerted by the stone on the car.

Solution

كمية الحركة للحجر تساوي صفر لأنه كان ثابت قبل اصطدام السيارة به. بعد التصادم يتحرك الحجر بسرعة السيارة وبالتالي يمكن حساب التغير في كمية الحركة من العلاقة التالية:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

therefore,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v})$$

$$= 0.5\times300 - 0 = 150\text{N.s}$$

To find the force we should estimate the time

$$t = \frac{x}{v} = \frac{0.2}{300} = 7\times10^{-4}\,s$$

زمن التصادم يحسب من الزمن المستغرق للسيارة لقطع مسافة الحجر والتي هي 20سنتمتر.

The force F is equal to 2×10^{5}N

Example 6.2

A ball of mass 0.4kg is thrown against a brick wall. When it strikes the wall it is moving horizontally to the left at 30m/s, and it rebounds horizontally to the right at 20m/s. Find the impulse of the force exerted on the wall.

Solution

The impulse of the force exerted on the wall is equal to the change in momentum,

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

therefore, the initial momentum p_i of the ball

$$p_i = mv = 0.4 \times (-30) = -12 \text{ kg.m/s}$$

therefore, the final momentum p_f of the ball

$$p_f = mv = 0.4 \times (20) = 8 \text{ kg.m/s}$$

the change in momentum is

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 8 - (-12) = 20 \text{ kg.m/s}$$

Hence, the impulse of the force exerted on the ball is 20 N.s. Since the impulse is positive, the force must be toward the right.

6.2 Conservation of linear momentum

عندما يتصادم جسمان مع بعضهما البعض فإن كل جسم سيغير كمية حركة الجسم الآخر لأن كل جسم سيؤثر بقوة على الجسم الآخر. وطبقاً لقانون نيوتن الثالث فإن القوتين متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الاتجاه.

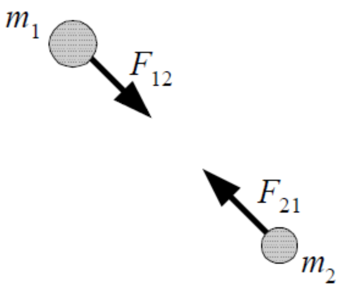

Figure 6.2

وهذا يؤدي إلى أن قوة الصدم ***Impulse*** خلال فترة التصادم متساويتان في المقدار متعاكستان في الاتجاه، وبالتالي فإن التغير في كمية الحركة الكلي للجسمين يبقى ثابتاً، وهذا ما يعرف بقانون الحفاظ على كمية الحركة ***Conservation of linear momentum***.

Suppose that at time t, two particles collide with each other, the momentum of particle 1 is p_1 and the momentum of particle 2 is p_2. In collision the particle exerts a force on each other as follow,

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \& \qquad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

where $\vec{F}_{12}$ is the force on particle 1 due to particle 2, and $\vec{F}_{21}$ is the force on particle 2 due to particle 1. From Newton's third law of motion, then,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (6.7)$$

hence,

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \qquad (6.8)$$

therefore,

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \qquad (6.9)$$

Since the time derivative of the momentum is zero, therefore the total momentum ($\vec{P}$) remains constant, *i.e.*

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const. \qquad [\textit{Conservation of momentum}] \qquad (6.10)$$

If the initial velocity of the particles 1 and 2 is v_{1i} and v_{2i} and the final velocity of the particles 1 and 2 is v_{1f} and v_{2f} we get,

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \qquad (6.11)$$

or

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad (6.12)$$

This equation represents the law of conservation of momentum.

Example 6.4

A cannon of mass 5000kg rest on frictionless surface as shown in figure 6.3. The cannon fired horizontally a 50kg cannonball. If the cannon recoil to the right with velocity 2m/s, what is the velocity of the cannonball just after it leaves the cannon?

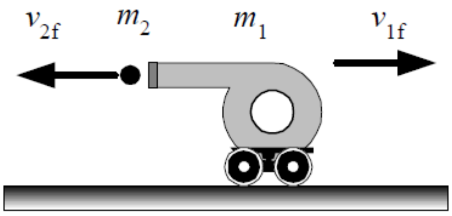

Figure 6.3

Solution

Using the conservation law of momentum

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

since the total momentum before firing is zero, therefore the total momentum after firing is zero as well.

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = 0 \quad \& \qquad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = 0$$

the velocity of the cannonball just after it leaves the cannon is

$$v_{2f} = \frac{-m_1 v_{1f}}{m_2} = \frac{-5000}{50} \times 2 = -200 \text{ m/s}$$

الإشارة السالبة تشير إلى أن السرعة النهائية للقذيفة تتحرك إلى اليسار عكس ارتداد الدبابة.

6.3 Collisions

التصادم بين جسمين ***collisions*** يعتبر من التطبيقات الهامة على قانون الحفاظ على كمية الحركة حيث يؤثر كل جسم على الآخر بقوة صدم ***impulse*** لفترة زمنية قصـــيرة وقـــد يكون التصادم ناتجاً عن تلامس الجسمين مع بعضهما البعض مثل التصادم النـــاتج عـــن كرات البلياردو أو تصادم كرة التنس مع المضرب أو أن يكون التصادم عن بعـــد مثـــل تصادم الأجسام المشحونة كتصادم بروتون مع أيون موجب.

يمكن تقسيم التصادمات بين الأجسام إلى ثلاثة أنواع معتمدين على مبدأ الحفاظ على الطاقة وكمية الحركة وأنواع التصادمات هي موضحة في الشكل 6.4.

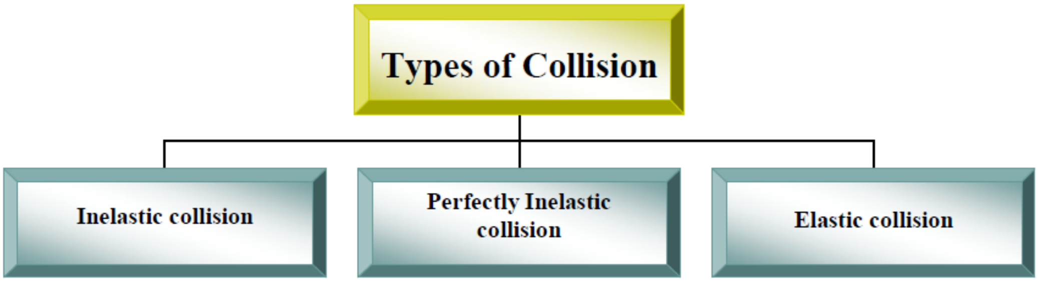

Figure 6.4

Inelastic collision: *is one in which the momentum is conserved, but the kinetic energy is not conserved.*

Perfectly Inelastic collision: *when the two objects stick together after collision and they move with the same velocity.*

Elastic collision: *is one in which the momentum and the kinetic energy are conserved.*

When two particles collide as shown in Figure 6.5 the impulse force $\vec{F}_{12}$ will change the momentum of particle 1 and the impulse force $\vec{F}_{21}$ will change the momentum of particle

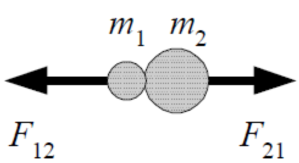

Figure 6.5

2, therefore,

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}dt \qquad \textit{the change momentum of } m_1$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}dt \qquad \textit{the change momentum of } m_2$$

By applying Newton's third law of motion we get,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

hence

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \qquad (6.13)$$

Therefore, the total momentum $\vec{P}$ is constant

السؤال الآن ماذا عن السرعة النهائية لجسم بعد التصادم؟ وللإجابة على هـذا التسـاؤل سندرس نوعين من أنواع التصادمات التي تكون فيها كميـة الحركـة محفوظـة وهمـا التصادمات غير المرنة كلياً والتصادمات المرنة.

6.3.1 Perfectly Inelastic collisions

في هذا النوع من التصادمات يكون لكل جسم سرعة ابتدائيـة وبعـد التصـادم يتحـرك الجسمان بسرعة نهائية واحدة لكليهما. وفي هذه الحالة تكون كمية الحركة محفوظـة أي أن كمية الحركة قبل التصادم تساوي كمية الحركة بعد التصادم. ولكن طاقة الحركة غير محفوظة لهذا نطبق قانون الحفاظ على كمية الحركة فقط في هذه الحالة.

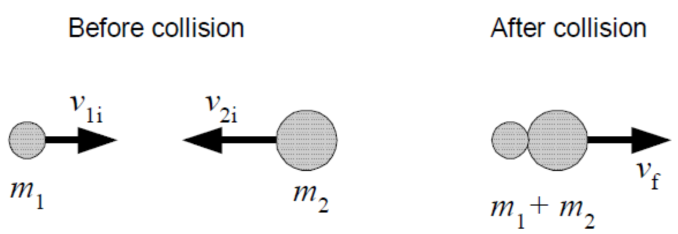

Figure 6.6

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} \quad = \quad \vec{p}_{(1+2)f}$$

Before collision ***After collision***

By applying the law of conservation of momentum, therefore,

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f \qquad (6.14)$$

Hence, the final velocity of the two colliding particles is,

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad (6.15)$$

Example 6.5

A car of mass 1000kg moving with velocity of 20cm/s hit another car of mass 2000kg at rest. The two cars moves with the same velocity due to collision. (a) What is the velocity of the two cars after the collision? (b) How much kinetic energy is lost in the collision?

Solution

(a) Since the two cars moves as one object therefore, the collision is inelastic.

Before collision the momentum is

$$p_i = m_1 v_{1i} = 1000 \times 20 = 2 \times 10^4 \text{ kg.m/s}$$

$$p_f = (m_1 + m_2)v_f = (1000 + 2000)v_f = 3000v_f$$

The momentum before collision = the momentum after collision

therefore the final velocity is,

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 10^4}{3000} = 6.66 \text{ m/s.}$$

(b) The kinetic energy before collision (K_i) = the kinetic energy after collision (K_f)

$$K_i = K_f$$

$$K_i = \frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2i}}^2 = \frac{1}{2}\times 1000\times(20)^2 + 0 = 2\times 10^5\ \text{J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_f}^2 = \frac{1}{2}\times(1000+2000)\times(6.66)^2 + 0 = 0.66\times 10^5\ \text{J}$$

Hence, the kinetic energy is lost in the collision is

$$K_i - K_f = 1.34\times 10^5\ \text{J}$$

Example 6.6

A bullet of mass *m* is fired to a large wood block suspended by string. The bullet is stopped by the block of mass *M*, and the entire system swing through a height *h*. Find the initial velocity of the bullet before collision. Assume *m*=10g, *M*=2kg, and *h*=12cm ?

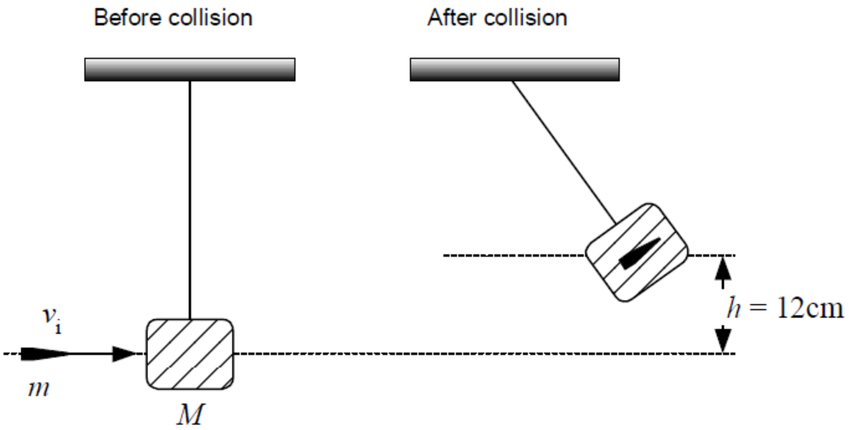

Figure 6.7

Solution

يستخدم هذا المثال كتجربة لإيجاد سرعة الأجسام المتحركة بسرعات عالية مثل سرعة انطلاق رصاصة. وسوف نقوم في الخطوة الأولى بتحديد السرعة النهائية من قانون الحفاظ على الطاقة الميكانيكية وفي الخطوة الثانية سنقوم بحساب السرعة الابتدائية للرصاصة قبل التصادم باستخدام قانون الحفاظ على الكتلة.

Since the collision is inelastic and the total momentum is conserved, then, from equation (6.15).

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad \text{where } v_{2i} = 0,\ m_1 = m \text{ and } m_2 = M$$

$$v_f = \frac{m v_{1i}}{m + M}$$

The kinetic energy after the collision is given by

$$K_f = \frac{1}{2}(m + M){v_f}^2$$

Substitute for v_f we get

$$K_f = \frac{m^2 {v_i}^2}{2(m + M)} \qquad \text{where } v_i \text{ is the initial velocity of the bullet}$$

This kinetic energy is transformed to potential energy *i.e.*

$$K_f = (m+M)\, g\, h$$

or

$$\frac{m^2 {v_i}^2}{2(m + M)} = (m + M)gh$$

$$v_i = \left(\frac{m + M}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

ومن هذه المعادلة يمكن إيجاد السرعة الابتدائية للرصاصة من قياس ارتفاع المجموعة h بعد التصادم.

for m=10g, M=2kg, and h=12cm the velocity of the bullet is

$$v_i = 301.5 \text{ m/s}$$

6.3.2 Elastic collisions

في هذا النوع من التصادمات يكون لكل جسم سرعة ابتدائية وبعد التصادم يصبح لكل جسم سرعة نهائية. وفي هذه الحالة تكون كل من كمية الحركة وطاقة الحركة محفوظة أي أن كمية الحركة قبل التصادم تساوي كمية الحركة بعد التصادم وكذلك طاقة الحركة

قبل التصادم تساوي طاقة الحركة بعد التصادم. وهذان القانونان يؤديان إلـــى معـــادلتين لإيجاد مجهولين هما السرعة النهائية للجسمين المتصادمين.

For two particles m_1 and m_2 moving with initial velocities v_{1i} and v_{2i} undergo elastic collision. Find the final velocities v_{1f} and v_{2f} of the two particles after collision.

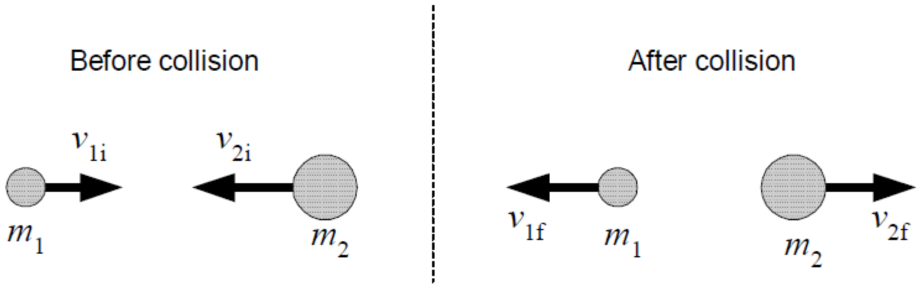

Figure 6.8

Before collision		***After collision***
$\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i}$	=	$\vec{p}_{1f}+\vec{p}_{2f}$
$K_{1i}+K_{2i}$	=	$K_{1f}+K_{2f}$

To find the final velocities v_{1f} and v_{2f} we need two equations, since the collision is elastic then, the first equation is found using the law of conservation of momentum and the second equation is found the law of conservation of kinetic energy.

By applying the law of conservation of momentum, therefore,

$$m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}=m_1\vec{v}_{1f}+m_2\vec{v}_{2f} \qquad (6.16)$$

By applying the law of conservation of kinetic energy, therefore,

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2i}^{\,2}=\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1f}^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2f}^{\,2} \qquad (6.17)$$

حيث أن السرعة كمية متجهة فإننا نعتبر اتجاه السرعة موجباً إذا كان الجسم متحركاً إلـــى اليمين وتكون السرعة سالبة إذا كان الجسم متحركاً إلى اليسار.

rearranging equation (6.17) we get,

$$m_1(\vec{v}_{1i}^{\,2}-\vec{v}_{1f}^{\,2})=m_2(\vec{v}_{2f}^{\,2}-\vec{v}_{2i}^{\,2}) \qquad (6.18)$$

If we take the terms of m_1 on one side and the terms of m_2 on the other side we get,

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad (6.19)$$

rearranging equation (6.16) we get,

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (6.20)$$

by dividing the equations (6.16) & (6.19) to eliminate m_1 & m_2 we get

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \quad (6.21)$$

or

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (6.22)$$

المعادلة (6.22) تشير إلى أن فرق السرعة الابتدائية للجسمين تساوي سالب فرق السرعة النهائية للجسمين في حالة التصادم المرن.

يمكن استخدام المعادلة الأخيرة مع معادلة الحفاظ على كمية الحركة لإيجاد السرعات النهائية للجسمين المتصادمين تصادماً مرناً وتكون نتيجة حل المعادلتين جبرياً كما يلي:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \quad (6.23)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \quad (6.24)$$

عند التعويض في المعادلتين السابقتين يجب أن نأخذ في الحسبان إشارة اتجاه السرعة حيث تكون موجبة إذا كان الجسم متحركاً إلى اليمين وتكون السرعة سالبة إذا كان الجسم متحركاً إلى اليسار.

6.3.3 Special cases

Case 1: When $m_1 = m_2$, then $v_{1f} = v_{2i}$ and $v_{2f} = v_{1i}$

وهذا يعني أن الجسمين المتصادمين يتبادلان السرعة مع بعضهما البعض نتيجة للتصادم المرن كما يحدث في تصادم كرات البلياردو.

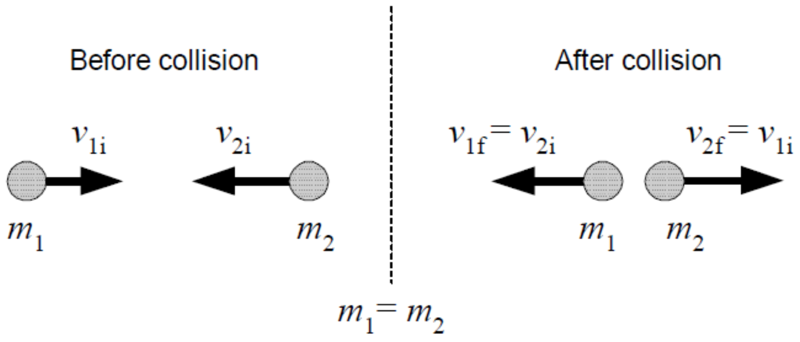

Figure 6.9

Case 2: when mass m_2 is initially at rest *i.e.* $v_{2i} = 0$, the final velocity is given by,

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (6.25)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (6.26)$$

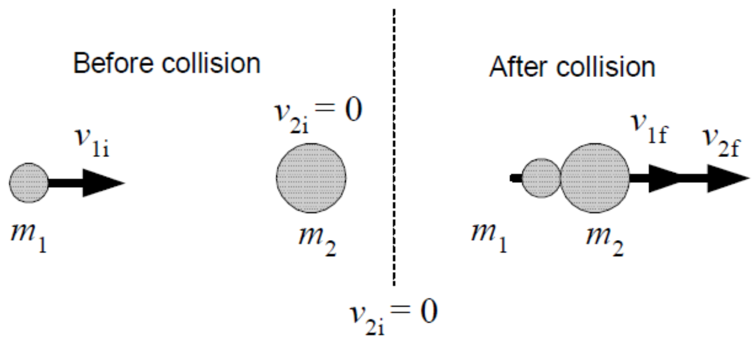

Figure 6.10

Case 3: when m_1 is very large compare with m_2, then $v_{1f} \approx v_{1i}$ and $v_{2f} \approx 2v_{1i}$.

و هذا يعني أنه في حالة صدم جسم ثقيل لجسم خفيف ساكن تصادماً مرناً فإن الجسم الثقيل سيتحرك بنفس سرعته قبل التصادم بينما الجسم الخفيف فسيتحرك بسرعة ضعف سـرعة الجسم الثقيل بعد التصادم.

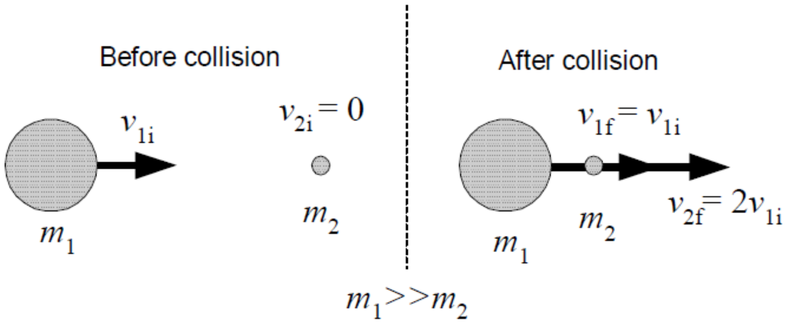

Figure 6.11

Example 6.7

A block of mass m_1=2kg moving to the right with a speed of 5m/s on frictionless horizontal track collides with a spring attached to a second block of mass m_2=3kg moving to the left with speed of 4m/s, as shown in figure 6.12. The spring has a spring constant of 500N/m. at the instant when the speed of 3m/s, determine the velocity of m_2 and (b) the distance x that the spring is compressed.

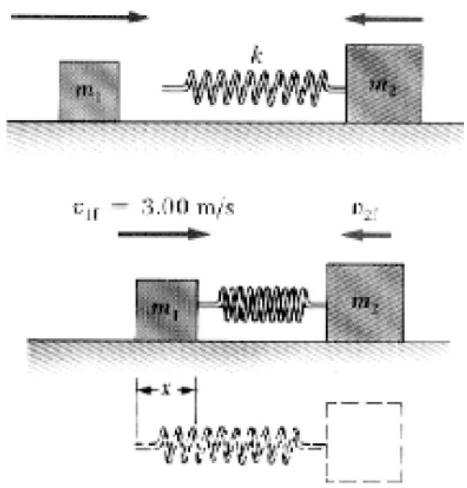

Figure 6.12

Solution

(a) Since the collision is elastic, the momentum and kinetic energy is conserved, we have

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

v_{2i} is negative because the direction of the velocity is to the left

$$2 \times 5 + 3 \times (-4) = 2 \times 3 + (3) v_{2f}$$

$$\therefore v_{2f} = -2.66\,\text{m/s}$$

The negative sign indicates that the final velocity of m_2 still moving towards the left.

(b) the distance x that the spring is compressed could be found using the law of conservation of kinetic energy.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^{\ 2} = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^{\ 2} + \frac{1}{2}kx^2$$

The term ½ kx^2 is the energy of the spring after collision, if we substitute for the values we can get the value of x

$$x = 0.34\text{ m}$$

Example 6.8

A 12 g bullet is fired into 100g wooden block initially at rest on a horizontal surface. After impact, the block slides 7.5m before coming to rest. If the coefficient of friction between the block and the surface is 0.65, what was the speed of the bullet immediately before impact?

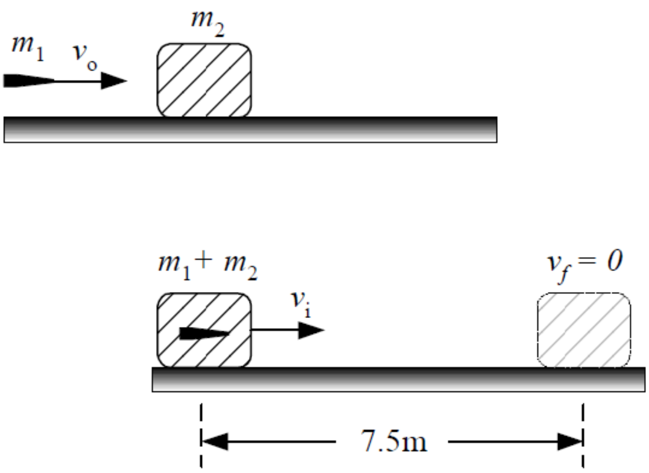

Figure 6.13

Solution

لنفترض أن السرعة التي انطلقت بها الرصاصة هي v_o وسرعة المجموعة بعد التصـــادم مباشرة هي v_i والسرعة النهائية للمجموعة هـــي صـــفر $v_f = 0$ لأنهـــا توقفـــت نتيجـــة الاحتكاك.

Since the collision is totally inelastic, and the momentum is conserved,

$$m_1 v_o = (m_1 + m_2) v_i$$

hence,

$$v_i = \left(\frac{12}{12+100}\right) v_o = (0.107) v_o \qquad (\ast)$$

The initial kinetic energy is lost due to the work done by the force of friction. Since,

$$W_f = \Delta K = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^{\,2}$$

and

$$W_f = -fs = -\mu m g s$$

hence,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^{\,2} = \mu (m_1 + m_2) g s$$

or

$$v_i^{\,2} = 2\mu g s$$

substitute for v_i from equation ($\ast$) we get,

$$(0.107)^2 v_o^{\,2} = 2 \times 0.65 \times 9.8 \times 7.5$$

$$v_o = 91.2 \mathrm{m/s}$$