Find optimum Solution by using Big-M Method

استخدام طريقة Big-M في إيجاد الحل الأمثل

محاضرة

مقدمة من قبل

المدرس المساعد

احمد هشام محمد طاهر

قسم الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد

جامعة البصرة

لتوضيح خطوات إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية باستخدام طريقة Big-M نأخذ المثال التالي :

Ex: Solve the following LPP using Big-M method :

$$Max\ Z = -2X_1 - X_2$$

$$S.T.: \quad 3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ملاحظات مهمة قبل بدأ الحل

١. تستخدم طريقة Big-M اذا كان على الأقل قيد واحد من قيود مشكلة البرمجة الخطية من نوع ($\geq$) او ($=$) .

٢. يجب ان تكون قيم متجه (b_j) الجانب الأيمن من القيود موجبة الإشارة .

٣. إضافة متغيرات وهمية (راكدة) S_j اذا كان القيد من نوع $\leq$.

٤. اضافة متغيرات صناعية (A_j) اذا كان القيد من نوع $=$.

٥. طرح متغير زائد (L_j) واضافة متغير صناعي (A_j) اذا كان القيد من نوع $\geq$.

٦. تنص طريقة Big-M على ظهور المتغيرات الصناعية بمعامل مقداره (M) اذا كانت دالة الهدف من نوع Min وبمعامل مقداره (-M) اذا كانت دالة الهدف من نوع Max .

حيث ان المعامل M هو معامل كبير موجب الاشارة .

مراحل إيجاد الحل الأمثل حسب طريقة Big-M

(1) تحويل قيود مشكلة البرمجة الخطية الى معادلات حسب الصيغة القياسية، كما يلي :

- **القيد الأول** ($3X_1 + X_2 = 3$) وهنا نلاحظ ان القيد هو بصيغة معادلة ($=$) ولكي يتوافق مع الصيغة القياسية يتم إضافة متغير صناعي A_j وعليه يكون القيد بشكل التالي :

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3$$

- **القيد الثاني** ($4X_1 + 3X_2 \geq 6$) نلاحظ القيد الثاني من نوع ($\geq$) اكبر او يساوي لتحويل القيد الى معادلة حسب الصيغة القياسية يتم طرح متغير (L_j) زائد وأضافه متغير صناعي (A_j)، وعليه يكون على الشكل التالي :

$$4X_1 + 3X_2 - L_1 + A_2 = 6$$

- **القيد الثالث** ($X_1 + 2X_2 \leq 4$) نلاحظ القيد من نوع ($\leq$) اقل او يساوي وعليه يتم إضافة متغير راكد (S_j) لتحويل القيد الى معادلة، وعليه يكتب القيد بالشكل التالي :

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$

وعليه تكون معادلات مشكلة البرمجة الخطية بعد اجراء التحويل

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3 \quad \text{...(1)}$$

$$4X_1 + 3X_2 - L_1 + A_2 = 6 \quad \text{...(2)}$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4 \quad \text{...(3)}$$

كتابة شكل النموذج البرمجة الخطية حسب طريقة Big-M بعد اجراء التحويلات على القيود :

$$Max\ Z = -2X_1 - X_2 - MA_1 - MA_2 + 0S_1$$

S.T:

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3 \quad \text{...(1)}$$

$$4X_1 + 3X_2 - L_1 + A_2 = 6 \quad \text{...(2)}$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4 \quad \text{...(3)}$$

$$X_1, X_2, A_1, A_2, S_1 \geq 0$$

(٢) التخلص من المتغيرات الصناعية A_2, A_1 في دالة الهدف

ويتم ذلك من خلال إيجاد الصيغة المقابلة لكل متغير من خلال معادلات مشكلة البرمجة الخطية

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3 \quad ...(1)$$
$$A_1 = -3X_1 - X_2 + 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - L_1 + A_2 = 6 \quad ...(2)$$
$$A_2 = -4X_1 - 3X_2 + L_1 + 6$$

نعوض بالصيغة المقابلة لكل متغير صناعي في دالة الهدف

$$Max\ Z = -2X_1 - X_2 - MA_1 - MA_2 + 0S_1$$

$$Max\ Z = -2X_1 - X_2 - M(-3X_1 - X_2 + 3) - M(-4X_1 - 3X_2 + L_1 + 6) + 0S_1$$

نجري التبسيط التالي

$$Max\ Z = -2X_1 - X_2 + 3MX_1 + MX_2 - 3M + 4MX_1 + 3MX_2 - ML_1 - 6M + 0S_1$$

$$Max\ Z = (-2 + 7M)X_1 + (-1 + 4M)X_2 - ML_1 - 9M + 0S_1$$

نحول جميع المتغيرات الى الطرف الايسر ما عدا (-9M) :

$$Max\ Z - (-2 + 7M)X_1 - (-1 + 4M)X_2 + ML_1 - 0S_1 = -9M$$

$$Max\ Z + (2 - 7M)X_1 + (1 - 4M)X_2 + ML_1 - 0S_1 = -9M$$

كتابة شكل النموذج البرمجة الخطية حسب طريقة Big-M بعد اجراء التحويلات على دالة الهدف

$$\text{Max } Z + (2-7M)X_1 + (1-4M)X_2 + ML_1 - 0S_1 = -9M$$

S.T:

$$3X_1 + X_2 + A_1 = 3 \quad \text{...(1)}$$

$$4X_1 + 3X_2 - L_1 + A_2 = 6 \quad \text{...(2)}$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4 \quad \text{...(3)}$$

$$X_1, X_2, A_1, A_2, S_1 \geq 0$$

تكوين جدول الحل الابتدائي

Z_j-C_j	$2-7M$	$1-4M$	0	0	M	0	-9M
B.V.	X1	X2	A_1	A_2	L_1	S_1	b_j
A_1	3	1	1	0	0	0	3
A_2	4	3	0	1	-1	0	6
S_1	1	2	0	0	0	1	4

تحديد المتغير الداخل في الحل في جدول الحل الابتدائي

العمود المحوري

Z_j-C_j	2 – 7M	1 – 4M	0	0	M	0	-9M
B.V.	X1	X2	A_1	A_2	L_1	S_1	b_j
A_1	3	1	1	0	0	0	3
A_2	4	3	0	1	-1	0	6
S_1	1	2	0	0	0	1	4

* لتحديد المتغير الداخل في الحل : يتم ملاحظة معاملات دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي ويتم اختيار اكبر معامل اشارته سالبة اذا كانت دالة الهدف من نوع MAX واكبر معامل اشارته موجبه اذا كانت MIN

نفترض عدة قيم للمعامل (M) مثلا (1,2,…,n) حيث ان :قيمة (M) هي موجبة وكبيرة (M>0)

فاذا فرضنا ان M=4 ,M=2، فعند التعويض

X1= 2-7M X2= 1-4M X1=2-7M X2=1-4M

X1=2-7(2) X2=1-4(2) X1=2-7(4) X2=1-4(4)

X1= -12 X2= -7 X1= -26 X2= -15

وعلى هذا الأساس فان اكبر معامل اشارته سالبة هو المتغير X1= -12 , -26 وعليه يكون هو المتغير الداخل في الحل

واجب // جد جدول الحل الابتدائي لمشكلة البرمجة الخطية حسب الحالات التالية :

H.W

الحالة الاولى

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$S.T.: \quad 2X_1 + X_2 + X_3 = 12$$
$$3X_1 + 4X_2 = 11$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحالة الثانية

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$S.T.: \quad 2X_1 + X_2 + X_3 = 12$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 11$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$