الدوال البسيطة:

١- الدوال المعقدة الآسية : تكتب الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر كالآتي:

$$f(z) = e^z$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^z = e^x(cosy + isiny)$$

لحالة $y = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^z = e^x$$

نلاحظ ان هذه الدالة تتحول الى دالة آسية لمتغيرات حقيقية. اما عندما $x = 0$ ، الدالة المعقدة الآسية تكون

$$e^{iy} = cosy + isiny$$

وتعرف بصيغة اويلر. ان الدالة الاسية المعقدة تتحقق قانون الاشتقاق لكل z

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

يمكن اعادة كتابة صيغة الدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ في المستوي المعقد بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر بالشكل:

$$f(z) = e^z = (e^x cosy) + i(e^x siny)$$

الصيغة القطبية للدالة المعقدة الآسية

$$f(z) = e^z = (\rho cos\varphi) + i(\rho sin\varphi)$$

من المقارنة بين الصيغتين نجد ان

$$\rho = e^x$$

و

$$\varphi = y$$

حيث تقاس y بنصف قطرية وهي الزاوية القطبية للدالة المعقدة الآسية ويرمز لها بالرمز $arg\,(f(z))$
ويتم حسابها بنفس طريقة حساب θ في الفصل الاول.

اما بالنسبة للقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية فهي

$$|f(z)| = |\,e^z|$$

$$= |\,e^x\,e^{iy}| = |e^x\,||e^{iy}|$$

$$= |e^x||(cosy + isiny)|$$

$$= e^x\sqrt{cos^2y + sin^2y}$$

$$|f(z)| = e^x = \rho$$

ان المعادلة الاخيرة تتيح لنا حساب ρ بنفس طريقة حساب r من القيمة المطلقة $|z|$ في الفصل الاول. ان $e^x > 0$ لكل عدد حقيقي x لهذا فأن $|e^z| > 0$ وان $e^z \neq 0$ لكل عدد عقدي z. هذا يعني ان مدى الدالة المعقدة الآسية هو كل المستوي العقدي ماعدا نقطة الاصل.

اما الجزء الحقيقي و الخيالي للدالة المعقدة الآسية $f(z) = e^z$ فهما:

$$Re(e^z) = e^x cosy$$

$$Im(e^z) = e^x siny$$

مثال: اكتب $f(z) = e^{z^2}$ بدلالة الاحداثيات المتعامدة وباستخدام صيغة اويلر ، وما الجزء الحقيقي، الخيالي، زاوية والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية ؟

الحل: نكتب الدالة الاسية بدلالة الاحداثيات المتعامدة x و y وباستخدام صيغة اويلر، بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = e^{(x^2-y^2)+2ixy} = e^{(x^2-y^2)}(cos(2xy) + isin(2xy))$$

لغرض ايجاد الجزء الحقيقي والخيالي ، نعيد كتابة المعادلة اعلاه بالشكل التالي:

$$e^{z^2} = \left(e^{(x^2-y^2)}cos(2xy)\right) + i\left(e^{(x^2-y^2)}sin(2xy)\right)$$

من المعادلة اعلاه ، الجزء الحقيقي يكون:

$$Re\left(e^{z^2}\right) = e^{(x^2-y^2)}cos(2xy)$$

والجزء الخيالي يكون:

$$Im(e^{z^2}) = e^{(x^2-y^2)} sin(2xy)$$

اما زاوية الدالة المعقدة الآسية تكون:

$$arg\,(e^{z^2}) = 2xy$$

والقيمة المطلقة للدالة المعقدة الآسية تكون:

$$|e^{z^2}| = e^{(x^2-y^2)}\sqrt{cos^2(2xy) + sin^2(2xy)} = e^{(x^2-y^2)}$$

مثال: اثبت ان $e^{z+2\pi i} = e^z$.

الحل:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)) = e^z(1 + i0)$$

$$= e^z$$

مثال: جد حل الدالة المعقدة الآسية $e^z = -1$.

الحل: يمكن ان نكتب (-1) بالصيغة القطبية التالية:

$$-1 = 1(cos\pi + isin\pi)$$

حيث ان

$$\rho = |e^x| = |e^z| = |-1 + 0| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^x(cosy + isiny) = 1(cos\pi + isin\pi)$$

نجد ان

$$e^x = 1 \qquad x = 0$$

و

$$y = \pi$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \pi + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots ..$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = i\pi(1 + 2k)$$

مثال: جد حل الدالة الاسية المعقدة $e^{2z} = 1 + i$.

الحل: يمكن ان نكتب (1+i) بالصيغة القطبية التالية :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$\rho = |e^{2x}| = |e^{2z}| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

من مساواة صيغة الدالة المعقدة الآسية وصيغة الدالة المعقدة القطبية يمكن كتابة

$$e^{2x}(cos2y + isin2y) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

حيث

$$e^{2x} = \sqrt{2}$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$ln(e^{2x}) = ln(\sqrt{2})$$

$$2x = ln(\sqrt{2})$$

$$x = \frac{1}{2}ln(\sqrt{2}) = ln(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = ln(2)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = ln\sqrt[4]{2}$$

و

$$y = \frac{\pi}{8}$$

ولعدد k من الدورات تكون y :

$$y = \left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

وبالتالي يكون الحل

$$z = x + iy = ln\sqrt[4]{2} + i\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)$$

من خواص الدالة الاسية ما يأتي:

1- $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

2- $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} =$

3- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

4- $(e^z)^n = e^{nz}$

حيث ان n عدد صحيح.

تمارين:

اثبت مايأتي

١- $e^{(2+3\pi i)} = -e^2$ ٢- $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{e}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ٣- $e^{z+\pi i} = -e^z$

جد حل الدوال الاسية المعقدة التالية:

١- $e^z = 1$
٢- $e^z = 2 - 2i$
٣- $e^{2z} = i$
٤- $e^{4z} = i$
٥- $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

انتهت المحاضرة ٣ الفصل ٢