طرق حل المعادلات اللاخطية

المعادلات اللاخطية هي المعادلات التي يكون فيها على الاقل حد واحد او دوال مثلثية او اسية درجة المعادلة اكبر من واحد

مثال

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$x - \sin x = 0$$
$$e^x - x = 0$$

لا توجد طريقة نظرية او قانون مباشر لإيجاد جذور مثل هذه المعادلات لذا يتم اللجوء الى الطرق العددية التقريبية لا يجاد الحلول وهذه الحلول تكون تقريبية وغير مضبوطة .

قد تكون المعادلة في مجهول واحد ولكنه يظهر بصورة لا خطية .وقد يكن نظام من المعادلات اللاخطية اي عدة معادلات في عدد من المجاهيل .

ملاحظة للحصول على المجال الذي يقع فيه الجذر هو تكوين جدول بقيم x وقيم الدالة ويكون المجال الذي يحتوي على الجذر هو المجال الذي تتغير فيه قيمة الدالة من حالة الى اخرى (من سالب الى موجب او من موجب الى سالب)

1)طريقة نيوتن – رافسون Newton – Raphson Method

لإيجاد جذر المعادلة f(x)=0 الموجود في المجال [a,b] حيث ان f(x) دالة مستمرة في المجال $x \in [a,b]$ **وان** $f'(x) \neq 0$ **لكل** $x \in [a,b]$ **وباختيار قيمة اولية للجذر** x_0 **في الفترة فان المتتالية** x_n **الناتجة من تطبيق صيغة نيوتن – رافسون تكون متقاربة الى الجذر r .**

صيغة نيوتن- رافسون هي

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

مثال جد حلا للمعادلة $x^2 + 2.1x - 1 = 0$ **بطريقة نيوتن – رافسون مستخدما** x_0 **=0.5 الواقع في المجال [0,1]**

الحل

$$f(x) = x^2 + 2.1x - 1$$
$$f'(x) = 2x + 2.1$$

n=1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = 0.5 - \frac{(0.5)^2 + 2.1(0.5) - 1}{2(0.5) + 2.1} = 0.40323$$

n=2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2 = 0.40323 - \frac{(0.40323)^2 + 2.1(0.40323) - 1}{2(0.40323) + 2.1} = 0.40000$$

n=3

$$x_3 = 0.4 - \frac{(0.4)^2 + 2.1(0.4) - 1}{2(0.4) + 2.1} = 0.4$$

لاحظ ان $x_2=x_3$ اي ان جذر المعادلة (0.4) .ولو عوضنا في المعادلة نحصل على f(0.4)=0 .

<u>مثال</u> جد جذور المعادلة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ باستخدام صيغة نيوتن- رافسون مقربا الحل لخمسة مراتب عشرية.

<u>الحل</u> يجب ان نحصل على المجال الذي يقع فيه الجذر

X	0	1	2
F(x)	-10	-5	14

لاحظ من الجدول ان قيمة الدالة = (-5)عند x=1 و قيمة الدالة (14) عند x=2

اذن مجال الدالة [1,2]هو المجال الذي تغيرت فيه قيمة الدالة من سالب الى موجب

ولايجاد القيمة الاولية لx نجد نقطة منتصف المجال

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

n=1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
$$x_1 = 1.5 - \frac{(1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10}{3(1.5)^2 + 8(1.5)} = 1.37333$$

n=2

$$x_2 = 1.37333 - \frac{(1.37333)^3 + 4(1.37333)^2 - 10}{3(1.37333)^2 + 8(1.37333)} = 1.36526$$

n=3

$$x_3 = 1.36526 - \frac{(1.36526)^3 + 4(1.36526)^2 - 10}{3(1.36526)^2 + 8(1.36526)} = 1.36523$$
$$x_4 = 1.36523$$

اذن x_3 هو جذر المعادلة وهو صحيح لخمس مراتب عشرية وهذه النتيجة حصلنا عليها بسبب اختيارنا الجيد للقيمة الاولية .

ان الاختيار غير الجيد ل x_0 قد يؤخر الحصول على النتائج مما يزيد عدد التكرارات او قد تبتعد عن بعضها بحيث لا نحصل على الحل المطلوب .

<u>مثال</u> استخدم صيغة نيوتن – رافسون لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{7}$

<u>الحل</u> نفرض

$$x = \sqrt{7}$$
$$x^2 = 7 \quad \Rightarrow x^2 - 7 = 0$$

<u>نجد مجال الدالة</u>

x	0	1	2	3
F(x)	-7	-6	-3	2

الجذر يقع في الفترة [2,3] .نجد القيمة الاولية

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

n=1

$$x_1 = 2.5 - \frac{(2.5)^2 - 7}{2(2.5)} = 2.65$$

$$x_2 = 2.65 - \frac{(2.65)^2 - 7}{2(2.65)} = 2.64576$$

$$x_3 = 2.64575 \quad , \quad x_4 = 2.64575$$

لاحظ ان x_3 وx_4 متطابقتان لخمس مراتب عشرية اذن x_3 هو جذر المعادلة .

<u>تمرين</u> (1)جد حل المعادلة التالية باستخدام صيغة نيوتن – رافسون

مقربا الحل لستة مراتب عشرية. $f(x) = \ln x - 2x + 3 \quad , x_0 = 0.6$

(2) استخدم نيوتن –رافسون لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{13}$ مقربا الحل لخمسة مراتب عشرية .

(3) حل المعادلة التالية $x^2 + 4x - 4 = 0$ باستخدام نيوتن – رافسون مقربا الحل لخمس مراتب عشرية .